Д-1 **Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки, находящейся под действием постоянных сил**

Материальная точка начинает двигаться из точки A со скоростью v_A, по траектории ABC. По прямолинейному участку АВ точка движется под действием активной силы P в течение времени t_1 и проходит путь s_1. По участку BC точка движется в течение времени t_2 (рисунок 1). Определить скорость v_A, размер d, скорость точки D (v_D) через время t_3 после отрыва точки от наклонной плоскости. Известно: m = 2кг, μ = 0,4, s_1 = 5 м, P = 3 Н, t_1 = 1 с, h = 5 м.

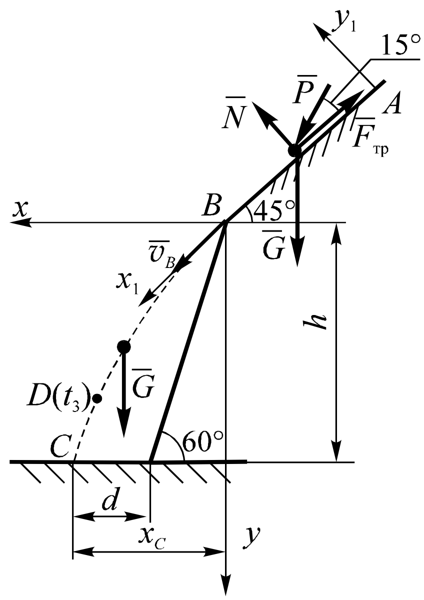

Рисунок 1 – Исходная схема

Решение

Рассмотрим движение материальной точки на участке AB. На точку действуют: постоянная сила P, сила тяжести G, сила трения $F_{тр}$, нормальная реакция опоры N. Введем систему координатных осей x, y с началом в точке A. Запишем динамические уравнения движения в проекциях на оси координат:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_i ,$$

$$ma_{x1} = G\cos 45° + P\cos 15° - F_{тр} ;$$

$$ma_{y1} = N - G\cos 45° - P\cos 75° .$$

Так как точка движется вдоль оси x, то $a_{x1} = a_\tau$, $a_{y1} = 0$. Тогда

$$ma_\tau = G\cos 45° + P\cos 15° - F_{тр} ;$$

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	
Разраб.		Механиков			Расчетно-графическая работа №1
Пров.		Кракова			
Н.					
Утв.					

Лит.	Лист	Листов
	1	

БелГУТ кафедра «ТФ и ТМ»

Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. Инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

$0 = N - G\cos 45° - P\cos 75°$.

Отсюда находим

$N = G\cos 45° + P\cos 75° = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}707 + 3 \cdot 0{,}259 = 14{,}6\ H$.

Сила трения равна

$F_{mp} = \mu N = 0{,}4 \cdot 14{,}6 = 5{,}84\ H$.

Определяем ускорение точки на участке *AB*:

$$a_\tau = \frac{1}{m}(G\cos 45° + P\cos 15° - F_{\text{тр}}) = \frac{1}{2}(2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}707 + 3 \cdot 0{,}966 - 5{,}84) = 5{,}46\ м/c^2.$$

Известно, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$. Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = 5{,}46.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство

$$dv = 5{,}46dt,$$

$$\int_{v_A}^{v} dv = 5{,}46\int_0^t dt,$$

$$v - v_A = 5{,}46t,$$

$v = v_A + 5{,}46t$ - закон изменения скорости точки на участке *AB*.

Найдем закон движения точки. Так как $v = \dfrac{ds}{dt}$, то можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{ds}{dt} = v_A + 5{,}46t.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство

$$ds = (v_A + 5{,}46t)dt,$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (v_A + 5{,}46t)dt,$$

$$s = v_A t + 5{,}46\frac{t^2}{2} = v_A t + 2{,}73t^2$$ - закон движения точки.

В положении В $v = v_{\text{В}}$, $t = t_1 = 1$ с, $s = s_1 = 5$ м. Подставляем в закон изменения скорости и в закон движения:

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + 5{,}46t_1, \\ s_1 &= v_A t_1 + 2{,}73t_1^2. \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} v_B &= v_A + 5{,}46, \\ 5 &= v_A + 2{,}73. \end{aligned}$$

Отсюда находим

Подп. и дата	Инв. № дубл.	Взам. Инв. №	Подп. и дата	Инв. № подл.

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					2

$$v_A = 5 - 2{,}73 = 2{,}27\ м/с,$$
$$v_B = 2{,}27 + 5{,}46 = 7{,}73\ м/с.$$

Рассмотрим движение точки на участке BC. На точку действует только сила тяжести G. Введем новую систему координатных осей с началом в точке B. Запишем динамические уравнения движения в проекциях на оси координат:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i\,,$$

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = G,$$

$$a_x = 0, \qquad a_y = g,$$

Из кинематики известно $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$.

Чтобы найти законы изменения проекций вектора скорости решим дифференциальные уравнения:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_y}{dt} = g,$$

$$dv_x = 0, \qquad dv_y = g dt,$$

$$\int_{v_{Bx}}^{v_x} dv_x = 0, \qquad \int_{v_{By}}^{v_y} dv_y = g\int_0^t dt,$$

$$v_x - v_{Bx} = 0, \qquad v_y - v_{By} = gt,$$

Из расчетной схемы находим проекции вектора скорости точки в положении B:

$$v_{Bx} = v_B\cos 45°, \qquad v_{By} = v_B\cos 45°.$$

Таким образом, получаем

$$v_x = v_B\cos 45°, \qquad v_y = v_B\cos 45° + gt.$$

Найдем законы изменения координат точки на участке BC. Известно: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$.

Решим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_B\cos 45°, \qquad \frac{dy}{dt} = v_B\cos 45° + gt.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$dx = v_B\cos 45° dt, \qquad dy = (v_B\cos 45° + gt)dt,$$

$$\int_0^x dx = v_B\cos 45°\int_0^t dt, \qquad \int_0^y dy = \int_0^t (v_B\cos 45° + gt)dt,$$

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. Инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

$$x = v_B \cos 45° t, \qquad y = v_B \cos 45° t + g\frac{t^2}{2}.$$

Получили законы изменения координат точки.

В положении С точки: $x = x_C = d + EK = d + h/\text{tg}\ 60°$, $y = y_C = h$, $t = t_2$.

$$d + h/tg 60° = v_B \cos 45° t_2,$$

$$h = v_B \cos 45° t_2 + g\frac{t_2^2}{2}.$$

Подставим значения известных величин и решим систему уравнений.

$$d + 5/tg 60° = 7{,}73 \cos 45° t_2,$$

$$5 = 7{,}73 \cos 45° t_2 + 4{,}9 t_2^2.$$

$$4{,}9 t_2^2 + 5{,}47 t_2 - 5 = 0,$$

$$D = 5{,}47^2 + 4 \cdot 5 \cdot 4{,}9 = 127{,}92;$$

$$t_2 = \frac{-5{,}47 + 11{,}3}{9{,}8} = 0{,}6 c. -$$ время движения на участке ВС.

Находим расстояние d.

$$d = 7{,}73 \cos 45° t_2 - 10/tg 60° = 5{,}47 \cdot 0{,}6 - 2{,}9 = 0{,}38\ м.$$

Определим скорость точки в положении D в момент времени $t_3 = 0{,}4$ с:

$$v_{Dx} = v_x(t_3) = v_B \cos 45° = 5{,}47\ м/с,$$

$$v_{Dy} = v_y(t_3) = v_B \cos 45° + g t_3 = 5{,}47 + 9{,}8 \cdot 0{,}4 = 9{,}39\ м/с.$$

Модуль скорости равен

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = \sqrt{5{,}47^2 + 9{,}39^2} = 10{,}88\ м/с,$$

Ответ: $v_A = 2{,}27$ м/с, $d = 0{,}38$ м, $v_D = 10{,}88$ м/с.

Д-5 Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы

Груз 1 поднимается вверх посредством нити, соединенной с осью катка 2, который приводится в движение ремнем, наматываемым на малую ступень блока 3. Блок 3 приводится в движение активной силой F, приложенной к ступени радиуса R (рисунок 2). Считая ремень и нить нерастяжимыми определить скорость груза 1, когда он поднимется на высоту $h = 0{,}6$ м, если в начальный момент времени система находилась в покое.

Известно: $F = 2mg$, Н, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 4m$, радиус инерции блока 3 – $i_{1z} = r\sqrt{2}$, $R = 2r$, каток 2 считать сплошным однородным цилиндром.

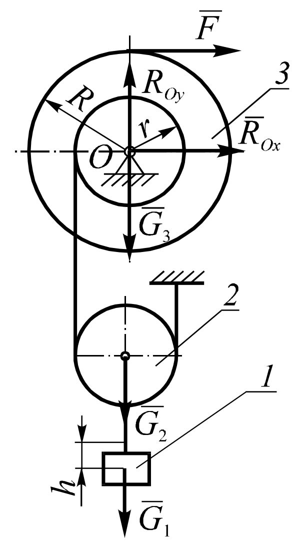

Рисунок 2 – Исходная схема с расстановкой векторов сил

Применим к решению задачи теорему об изменении кинетической энергии механической системы

$$T - T_0 = \sum A_i^{внеш} + \sum A_i^{внутр}.$$

Так как система вначале находилась в покое, то $T_0 = 0$. По условию тела системы связаны нерастяжимыми нитью и ремнем, следовательно $\sum A_i^{внутр} = 0$.

Тогда выражение теоремы запишем в виде

$$T = \sum A_i^{внеш}.$$

Кинетическая энергия системы в конечном положении будет равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия поступательного движущего груза 1 равна

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{2m v_1^2}{2} = m v_1^2.$$

Каток движется плоско. Его кинетическую энергию определим по формуле

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{I_{C2}\omega_2^2}{2}.$$

Момент инерции катка равен $I_{C2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{1}{2} m R_2^2.$

Запишем кинематические уравнения связей между скоростями тел системы (рисунок 3).

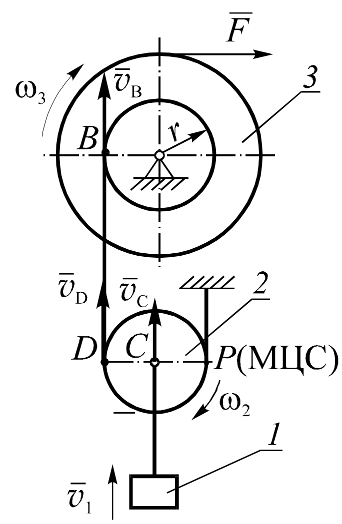

Рисунок 3 – Схема механизма с расстановкой векторов скоростей

Так как груз и ось катка C связаны нерастяжимой нитью, то $v_C = v_1$. С другой стороны, зная положение МЦС (точка P) $v_C = \omega_2 PC = \omega_2 R_2$. Отсюда

$$\omega_2 = \frac{v_C}{R_2} = \frac{v_1}{R_2}.$$

Тогда $$T_2 = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m R_2^2 v_1^2}{2 \cdot 2 R_2^2} = \frac{3 m v_1^2}{4} = 0{,}75 m v_1^2.$$

Блок 3 совершает вращательное движение. Его кинетическую энергию определим по формуле

$$T_3 = \frac{I_{z3}\omega_3^2}{2}.$$

Для блока 3 задан радиус инерции. Момент инерции равен

$I_{z3} = m_3 i_{z3}^2 = 4m(r\sqrt{2})^2 = 8mr^2.$

Выразим угловую скорость блока 3 через скорость груза 1. Запишем кинематические уравнения передачи движений:

$$v_B = v_D$$

$$\omega_3 \cdot r = \omega_2 \cdot PD,$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot PD}{r} = \frac{\omega_2 \cdot 2R_2}{r} = \frac{v_1 \cdot 2R_2}{R_2 \cdot r} = \frac{2v_1}{r}.$$

Тогда кинетическая энергия блока 3 равна

$$T_3 = \frac{8mr^2 4v_1^2}{2r^2} = 16mv_1^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = mv_1^2 + 0{,}75mv_1^2 + 16mv_1^2 = 17{,}75mv_1^2.$$

Определим сумму работ внешних сил, действующих на тела системы (рисунок 2).

$\sum A_i^{внеш} = A(\overline{G}_1) + A(\overline{G}_2) + A(\overline{G}_3) + A(\overline{R}_{Ox}) + A(\overline{R}_{Oy}) + A(\overline{F}).$

Работа сил реакций шарнира О равна нулю ($A(\overline{R}_{Ox}) = 0,\ A(\overline{R}_{Oy}) = 0$), так как ось вращения (точка О) неподвижна.

Работа сил тяжестей тел:

$A(\overline{G}_1) = -G_1 h = -m_1 gh = -2mgh$;

$A(\overline{G}_2) = -G_2 h = -m_2 gh_C$.

Так как $v_C = v_1$, то и перемещения точки С и груза 1 равны ($h = h_C$).

$A(\overline{G}_2) = -m_2 gh_C = -mgh$.

$A(\overline{G}_3) = m_3 gh_O = 0$ (сила G_3 приложена к неподвижной точке О).

Определим работу активной силы F:

$A(\overline{F}) = F \cdot s_E = F \cdot \varphi_3 R$,

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. Инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

здесь $s_E = \varphi_3 R$ перемещение точки приложения силы F при повороте блока на угол φ_3. Выразим угол поворота через перемещение груза 1. Ранее было получено $\omega_3 = \dfrac{2v_1}{r}$, следовательно $\varphi_3 = \dfrac{2s_1}{r} = \dfrac{2h}{r}$ ($s_1 = h$ так как груз движется вертикально). Тогда

$$A(\overline{F}) = F \cdot \varphi_3 R = 2mg\frac{2h}{r}R = 4mg\frac{h}{r}\cdot 2r = 8mgh.$$

Находим сумму работ внешних сил

$$\sum A_i^{внеш} = -2mgh - mgh + 8mgh = 5mgh.$$

Подставляем в выражение теоремы T и $\sum A_i^{внеш}$

$$17{,}75mv_1^2 = 5mgh$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{5gh}{17{,}75}} = \sqrt{\frac{5\cdot 9{,}8\cdot 0{,}6}{17{,}75}} = 1{,}29 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_1 = 1{,}29$ м/с.

Подп. и дата

Инв. № дубл.

Взам. Инв. №

Подп. и дата

Инв. № подл.

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Лист

Д-8 Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы

Ступенчатый блок 1 вращается под действием активной силы F, приложенной к ступени радиуса R, приводит в движение каток 2 и груз 3, подвешенный на нити к его оси (рисунок 4). Считая трос и нить нерастяжимыми определить ускорение груза 3 и силу натяжения нити, на которой он подвешен.

Известно: $F = 2mg$, Н, $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $m_3 = 2m$, радиус инерции блока 1 – $i_{1z} = r\sqrt{3}$, $R = 2r$, каток 2 считать сплошным однородным цилиндром.

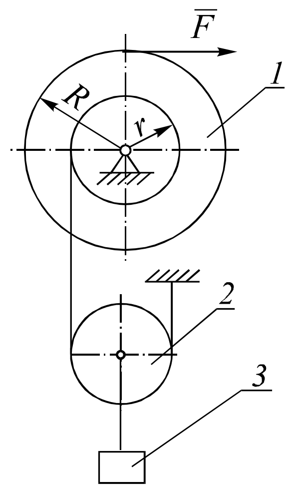

Рисунок 4 – Исходная схема исследуемой механической системы

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\overline{F}_i) + \sum \delta A(\overline{\Phi}_i) = 0.$$

Изображаем на рисунке активные силы $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ и $\overline{G}_3$. Прикладываем к системе силы инерции.

Блок 1 совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через его центр масс. Поэтому к нему прикладываем момент сил инерции M_1^{Φ} противоположно угловому ускорению блока ε_1. Каток 2 совершает плоское движение, перемещаясь вертикально с ускорением центра масс a_C и поворачиваясь относительно мгновенного центра скоростей (МЦС) с угловым ускорением ε_2. Прикладываем в центре масс силу инерции $\vec{\Phi}_2$, вектор которой направляем противоположно ускорению a_C и момент сил инерции M_2^{Φ}. Груз 3 движется поступательно, к центру масс приложим силу инерции $\vec{\Phi}_3$ противоположно ускорению груза (рисунок 5, *а,б*).

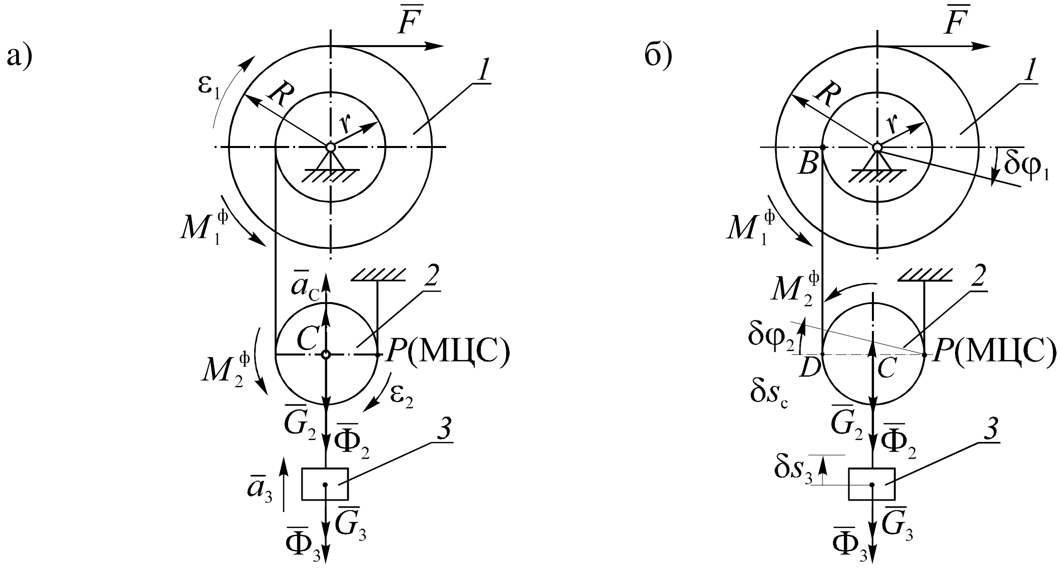

Рисунок 5 – Расчетная схема механической системы:
а – расстановка векторов активных сил, сил инерций и моментов сил инерций;
б – возможное перемещение системы

Задаем системе возможное перемещение. Блок 1 повернем на угол $\delta\varphi_1$, тогда каток 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$, при этом его центр масс получит возможное перемещение δs_C , а груз 3 – δs_3. Запишем сумму работ активных сил и сил инерций на возможном перемещении системы.

$$F\cdot R\delta\varphi_1 - M_1^{\phi}\cdot\delta\varphi_1 - G_2\cdot\delta s_C - \Phi_2\cdot\delta s_C - M_2^{\phi}\cdot\delta\varphi_2 - G_3\cdot\delta s_3 - \Phi_3\cdot\delta s_3 = 0; \qquad (2.1)$$

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Выразим все возможные перемещения через одно – δs_3. Запишем кинематические уравнения передачи движения:

$$v_3 = v_C = \omega_2\cdot PC = \omega_2\cdot R_2,$$

следовательно $\delta s_3 = \delta s_C = \delta\varphi_2\cdot R_2$,

отсюда $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_3}{R_2}$.

$v_B = v_D$

$\omega_1\cdot r = \omega_2\cdot PD$,

$\omega_1\cdot r = \omega_2\cdot 2R_2$, тогда $\delta\varphi_1\cdot r = \delta\varphi_2\cdot 2R_2$,

отсюда $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2\dfrac{2R_2}{r} = \dfrac{\delta s_3}{R_2}\dfrac{2R_2}{r} = \delta s_3\dfrac{2}{r}$.

Подставляем полученные выражения возможных перемещений в уравнение (2.1)

$$F \cdot R\delta s_3 \frac{2}{r} - M_1^{\phi} \cdot \delta s_3 \frac{2}{r} - G_2 \cdot \delta s_3 - \Phi_2 \cdot \delta s_3 - M_2^{\phi} \cdot \frac{\delta s_3}{R_2} - G_3 \cdot \delta s_3 - \Phi_3 \cdot \delta s_3 = 0$$

Поскольку $\delta s_3 \neq 0$, то на δs_3 можно сократить:

$$F \cdot R\frac{2}{r} - M_1^{\phi} \cdot \frac{2}{r} - G_2 - \Phi_2 - M_2^{\phi} \cdot \frac{1}{R_2} - G_3 - \Phi_3 = 0 \qquad (2.2)$$

Распишем силы инерции и моменты сил инерции:

$\Phi_3 = m_3 a_3$, $\Phi_2 = m_2 a_C$,

$M_1^{\Phi} = I_{1z}\varepsilon_1$, $M_2^{\Phi} = I_2\varepsilon_2$.

Момент инерции блока 1 равен $I_{1z} = m_1 i_1^2 = m_1(r\sqrt{2})^2 = 2m_1 r^2$, момент инерции катка 2 равен $I_{2C} = \dfrac{m_2 R_2^2}{2}$.

Так как надо определить ускорение груза 3, то выразим ε_1, ε_1, a_C через a_3.

Т.к. $v_3 = v_C = \omega_2 \cdot R_2$, то $a_3 = a_C = \varepsilon_2 R_2; \rightarrow \varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{R_2}$

$\omega_1 \cdot r = \omega_2 \cdot 2R_2$ или $\omega_1 \cdot r = \dfrac{v_3}{R_2} \cdot 2R_2 = 2v_3$, $\varepsilon_1 \cdot r = 2a_3$, $\rightarrow \varepsilon_1 = \dfrac{2a_3}{r}$.

С учетом выше приведенных соотношений получаем:

$\Phi_2 = m_2 a_C = m_2 a_3$,

$$M_1^{\Phi} = I_{1z}\varepsilon_1 = 2m_1 r^2 \cdot \frac{2a_3}{r} = 4m_1 r \cdot a_3,$$

$$M_2^{\Phi} = I_2\varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \frac{a_3}{R_2} = \frac{m_2 R_2}{2} a_3$$

Подставляем в уравнение (2.2)

$$F \cdot 2r\frac{2}{r} - m_1 i_1^2 \cdot \frac{2a_3}{r} \cdot \frac{2}{r} - G_2 - m_2 a_3 - \frac{m_2 R_2}{2} a_3 \cdot \frac{1}{R_2} - G_3 - m_3 a_3 = 0;$$

$$m_2 a_3 + \frac{m_2 R_2}{2} a_3 \cdot \frac{1}{R_2} + m_3 a_3 + 4m_1 r \cdot a_3 \cdot \frac{2}{r} = 4F - G_2 - G_3;$$

$$a_3\left(m_2+\frac{m_2}{2}+m_3+4m_1\right)=F\cdot R\frac{2}{r}-G_2-G_3;$$

$$a_3=\frac{4F-G_2-G_3}{m_2+\dfrac{m_2}{2}+m_3+4m_1}=\frac{4\cdot 2mg-mg-2mg}{m+0{,}5m+2m+8m}=\frac{5mg}{11{,}5m}=\frac{5g}{11{,}5}=\frac{5\cdot 9{,}8}{11{,}5}=4{,}26\,\text{м/с}^2.$$

Чтобы определить силу натяжения нити, разорвем ее, заменив действие силой $\vec{T}$ (рисунок 8)

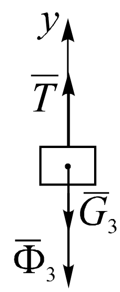

Рисунок 5 – Расчетная схема груза

Запишем принцип Даламбера для материальной точки:

$$\vec{T}+\vec{G}_3+\vec{\Phi}_3=0.$$

Спроецируем данное выражение на ось y.

$T-G_3-\Phi_3=0$

Отсюда $T=G_3+\Phi_3=2mg+m_3a_3=2mg+2m\cdot 4{,}26=28{,}12m$.

Ответ: $a_3=4{,}26$ м/с^2, $T=28{,}12m$.