

С-1 Равновесие плоской рамы

Определить реакции внешних связей при равновесии рамы, изображенной на рисунке 1, находящейся под действием сосредоточенной силы $P = 5$ кН; равномерно распределенной силы интенсивностью $q_{\max} = 1$ кН/м и пары сил с моментом $M = 8$ кН·м. Выполнить проверку правильности решения.

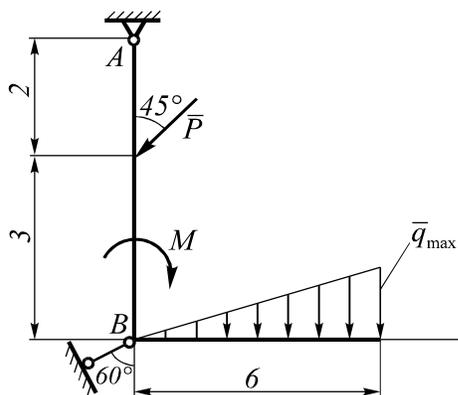


Рисунок 1 – Исходная схема

Решение

В точке A на раму наложена механическая связь – цилиндрический шарнир. На схеме ее действие заменяем двумя составляющими реакциями горизонтальной \vec{R}_{Ax} и вертикальной \vec{R}_{Ay} . В точке B рама удерживается невесомым стержнем. На схеме его действие заменяем соответствующей реакцией \vec{R}_B , которую направляем вдоль стержня (рисунок 2).

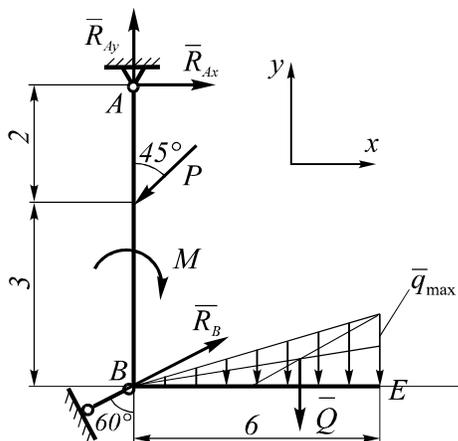


Рисунок 2 – Расчетная схема рамы

Подп. и дата								
Инв. № дубл.								
Взам. Инв. №								
Подп. и дата								
Инв. № подл.	Разраб.	Механиков	Подп.	Дата	Расчетно-графическая работа №1	Лит.	Лист	Листов
	Пров.	Кракова					1	
	Н.					БелГУТ		
	УТВ.					кафедра «ТФ и ТМ»		

Распределенную нагрузку, изменяющуюся по закону треугольника, заменяем равнодействующей Q . Ее прикладываем на расстоянии $BE/3$ от места приложения q_{\max} . Численное значение силы равно

$$Q = q_{\max} \frac{BE}{2} = 1 \cdot \frac{6}{2} = 3 \text{ кН.}$$

Силы, действующие на раму, не сходятся в одной точке, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - P \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0; \quad (1.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - P \cos 45^\circ + R_B \cos 60^\circ - Q = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum M_A(F) = 0; -Q \cdot 4 - P_x \cdot 2 - M + R_{Bx} \cdot 5 = 0. \quad (1.3)$$

Выражения составляющих сил \vec{P} и \vec{R}_B могут быть записаны в виде

$$P_x = P \cos 45^\circ; R_{Bx} = R_B \cos 30^\circ,$$

Решаем полученные уравнения. Из уравнения (1.3) находим

$$R_B = \frac{Q \cdot 4 + P \cos 45^\circ \cdot 2 + M}{5 \cos 30^\circ} = \frac{24 + 5 \cdot 0,707 \cdot 2 + 8}{5 \cos 30^\circ} = 9,02 \text{ кН.}$$

Из уравнений (1.1) находим

$$R_{Ax} = P \cos 45^\circ - R_B \cos 30^\circ = 5 \cdot 0,707 - 9,02 \cdot 0,866 = -4,28 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1.2) находим

$$R_{Ay} = P \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ + Q = 5 \cdot 0,707 - 9,02 \cdot 0,5 + 6 = 5,03 \text{ кН.}$$

Равнодействующая сил реакции цилиндрического шарнира

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-4,28)^2 + 5,03^2} = 6,6 \text{ кН.}$$

Выполним проверку правильности решения задачи. Для этого составим уравнение моментов относительно точки E , через которую не проходят линии действия искомых сил:

$$\sum M_E(F) = 0; Q \cdot 2 - M - R_{By} \cdot 6 - R_{Ax} \cdot 5 - R_{Ay} \cdot 6 + P \cos 45^\circ \cdot 6 + P \cos 45^\circ \cdot 3 = 0$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. Инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					2

Подставляем найденные значения реакций связей. С учетом $R_{By} = R_B \cos 60^\circ$.

$$6 \cdot 2 - 8 - 9,02 \cdot 0,5 \cdot 6 - (-4,28 \cdot 5) - 5,03 \cdot 6 + 5 \cos 45^\circ \cdot 6 + 5 \cos 45^\circ \cdot 3 = -0,025 \approx 0$$

(верно)

Ответ: $R_B = 9,02$ кН, $R_A = 6,6$ кН.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата							Лист
											3
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата							

С-2 Расчет плоской фермы

Для фермы, изображенной на рисунке 3, определить реакции внешних связей, наложенных на ферму, находящуюся под действием внешних сил $P = 520 \text{ Н}$, $F = 1900 \text{ Н}$, внутренние силы действующие на узлы фермы методом вырезания узлов и методом сечений. Известно $l = 2 \text{ м}$, $h = 1 \text{ м}$.

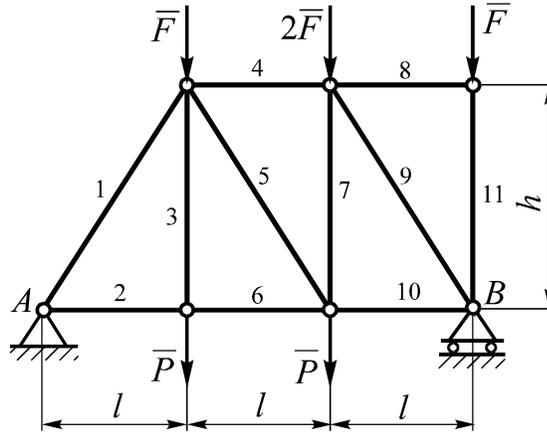


Рисунок 3 – Исходная схема фермы

Решение

1 Определяем реакции внешних связей.

Реакция цилиндрического шарнира (точка A) включает составляющие R_{Ax} и R_{Ay} (рисунок 4). В точке B конструкция взаимодействует с гладкой поверхностью, реакция которой R_B перпендикулярна поверхности (рисунок 4).

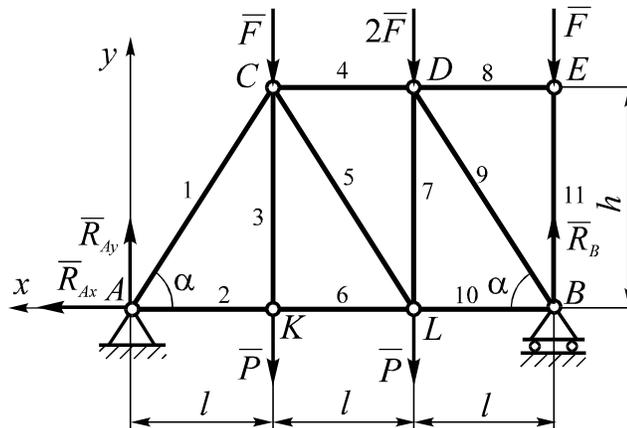


Рисунок 4 – Расчетная схема фермы

Определим углы наклона стержней фермы. Из геометрии схемы

Инв. № ПОДА.	
ПОАП. и ДАТА	
Взаим. Инв. №	
ИНВ. № ДУБЛ.	
ПОАП. и ДАТА	

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Лист
						4

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+1}} = 0,894;$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = 0,447.$$

На ферму действует система несходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - 4F - 2P + R_B = 0; \quad (2.2)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; -P \cdot l - F \cdot l - 2F \cdot 2l - P \cdot 2l - F \cdot 3l + R_B \cdot 3l = 0. \quad (2.3)$$

Решаем полученную систему уравнений. Из уравнения (2.3) находим

$$R_B = \frac{3P \cdot l + 8F \cdot l}{3l} = \frac{3 \cdot 520 + 8 \cdot 1900}{3} = 5586,7 \text{ Н.}$$

Из уравнения (2.2) находим:

$$R_{Ay} = 2P + 4F - R_B = 2 \cdot 520 + 4 \cdot 1900 - 5586,7 = 3053,3 \text{ Н.}$$

Выполним проверку. Для этого составим уравнение моментов относительно точки С, через которую не проходят линия действия искомым реакций:

$$\sum M_{Ci} = 0; R_B \cdot 2l - P \cdot l - 2F \cdot l - R_{Ay} \cdot l - F \cdot 2l = 0. \quad (2.4)$$

Подставляем в уравнение (4) численные значения реакций, полученные в результате решения системы уравнений (1) – (3):

$$5586,7 \cdot 2l - 520 \cdot l - 2 \cdot 1900 \cdot l - 3053,3 \cdot l - 1900 \cdot 2l = 0,1 \approx 0 \text{ (верно).}$$

2 Рассчитаем внутренние силы, действующие на узлы фермы, способом вырезания узлов.

Инв. № ПОДА.	ПОДП. и ДАТА
Взам. Инв. №	ПОДП. и ДАТА
Инв. № ДУБЛ.	ПОДП. и ДАТА

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					5

Обозначим узлы буквами, как это показано на рисунке 3. На каждый из них действуют силы реакций стержней фермы, которые пока неизвестны. Поэтому число неизвестных сил, действующих на каждый узел, в данный момент равно числу стержней, сходящихся в нем. Таким образом, наименьшее число неизвестных сил (по две) действуют на узлы *A* и *E*.

Расчет начнем с узла *A* (рисунок 5).

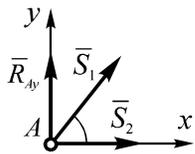


Рисунок 5

$$\sum F_{ix} = 0; S_1 \cos \alpha + S_2 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_1 \sin \alpha + R_{Ay} = 0.$$

Отсюда находим

$$\text{Так как } S_1 = -\frac{R_{Ay}}{\sin \alpha} = -\frac{3053,3}{0,447} = -6830,6 \text{ Н},$$

$$S_2 = -S_1 \cos \alpha = -(-6830,6) \cdot 0,894 = 6106,6 \text{ Н}.$$

Теперь по две неизвестные силы в узлах *K* и *C*. Вырезаем узел *K* (рисунок 6). Его уравнения равновесия имеют вид:

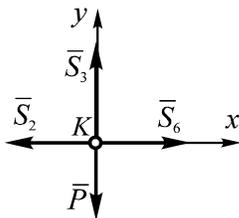


Рисунок 6

$$\sum F_{ix} = 0; S_6 - S_2 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_3 - P = 0.$$

$$\text{Решая их, находим: } S_6 = S_2 = 6106,6 \text{ Н}; S_3 = P = 520 \text{ Н}.$$

Теперь рассмотрим равновесие узла *C* (рисунок 7).

Его уравнения равновесия:

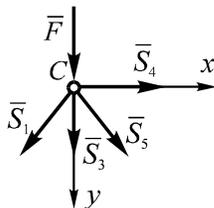


Рисунок 7

$$\sum F_{ix} = 0; S_4 + S_5 \cos \alpha - S_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_3 + F + S_1 \sin \alpha + S_5 \sin \alpha = 0.$$

Из них получаем:

$$S_5 = -\frac{F + S_3 + S_1 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{1900 + 520 + (-6830,6 \cdot 0,447)}{0,447} = 1416,7 \text{ Н};$$

$$S_4 = S_1 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = \cos \alpha (S_1 - S_5) = 0,894(-6830,6 - 1416,7) = -7373,1 \text{ Н}.$$

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	
Изм. Лист	№ докум.
Подп.	Дата

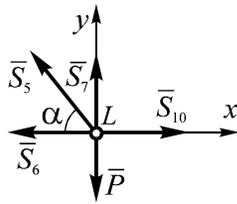


Рисунок 8

Рассмотрим равновесие узла L (рисунок 8). Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; S_{10} - S_6 - S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_7 - P + S_5 \sin \alpha = 0.$$

Решая их, находим:

$$S_7 = P - S_5 \sin \alpha = 520 - 1416,7 \cdot 0,447 = -113,3 \text{ Н};$$

$$S_{10} = S_6 + S_5 \cos \alpha = 6106,6 + 1416,7 \cdot 0,894 = 7373,1 \text{ Н}.$$

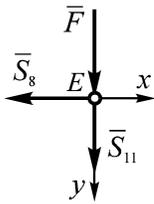


Рисунок 9

Рассмотрим равновесие узла E (рисунок 9):

$$\sum F_{ix} = 0; -S_8 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; F + S_{11} = 0.$$

Отсюда

$$S_8 = 0 \text{ Н}, \quad S_{11} = -F = -1900 \text{ Н}.$$

Рассмотрим равновесие узла B (рисунок 10):

$$\sum F_{ix} = 0; S_9 \cos \alpha + S_{10} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_B + S_{11} + S_9 \sin \alpha = 0.$$

Решая уравнения, находим

$$S_9 = -\frac{S_{10}}{\cos \alpha} = -\frac{7373,1}{0,894} = -8247,3 \text{ Н};$$

$$S_{11} = -R_B - S_9 \sin \alpha = -5586,6 - (-8247,3) = 2660,7 \text{ Н}.$$

Остался нерассмотренным узел D (рисунок 11). Его используем для проверки. Запишем уравнения равновесия этого узла:

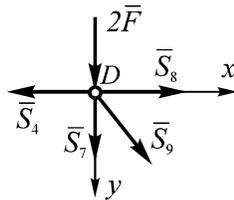


Рисунок 11

$$\sum F_{ix} = 0; -S_4 + S_8 + S_9 \cos \alpha = 0.$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_7 - 2F - S_9 \sin \alpha = 0.$$

Подставляем найденные численные значения:

$$7373,1 + 0 + (-8247,3 \cdot 0,894) = 0,01 \approx 0 \text{ (верно);}$$

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

$$113,3 - 2 \cdot 1900 - (-8247,3 \cdot 0,447) = 0,06 \approx 0 \text{ (верно).}$$

Равенство нулю последних выражений подтверждает правильность расчетов по определению внутренних сил, действующих на узлы фермы.

Рассечение фермы выполним по стержням 4, 5 и 6 (рисунок 112). Рассмотрим равновесие части фермы, расположенной левее сечения. При расстановке сил учитываем активные силы и силы взаимодействия частей конструкции: S_4 , S_5 , S_6 (рисунок 13).

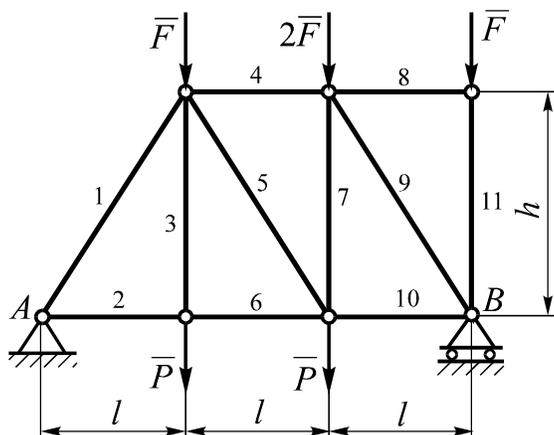


Рисунок 10

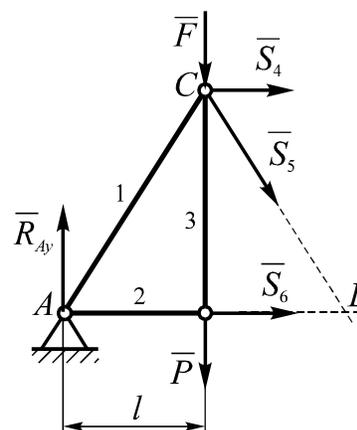


Рисунок 11

Таким образом, на отсеченную часть действует система несходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Запишем три уравнения равновесия

$$\sum F_{iy} = 0; -S_5 \sin \alpha - P - F + R_{Ay} = 0;$$

$$\sum M_{iC} = 0; -R_{Ay} \cdot l + S_6 \cdot h = 0;$$

$$\sum M_{iL} = 0; F \cdot l + P \cdot l - S_4 \cdot h - R_{Ay} \cdot 2l = 0.$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$S_5 = \frac{R_{Ay} - P - F}{\sin \alpha} = \frac{3053,3 - 520 - 1900}{0,447} = 1416,8 \text{ Н};$$

$$S_6 = -\frac{R_{Ay} \cdot l}{h} = -\frac{3053,3 \cdot 2}{2} = -6106,6 \text{ Н};$$

$$S_4 = \frac{P \cdot l + F \cdot l - R_{Ay} \cdot 2l}{h} = \frac{520 \cdot 2 + 1900 \cdot 2 - 3053,3 \cdot 4}{1} = -7373,2 \text{ Н}.$$

Интв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	
Интв. № подл.	

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					8

С-3 Равновесие составной конструкции (система двух тел)

Определить реакции внешних связей конструкции, состоящей из двух частей соединенных шарнирно в точке С (рисунок 12). Известно $F_1 = 200$ Н, $F_2 = 150$ Н, $q = 40$ Н/м, $M = 50$ Н·м. Выполнить проверку правильности решения.

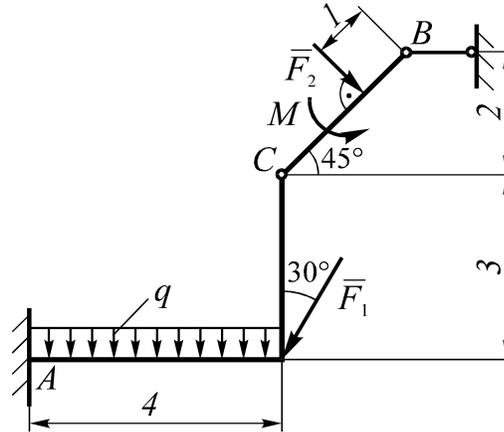


Рисунок 12 – Исходная схема

Разобьем конструкцию по соединительному шарниру С на две части АС и ВС. Рассмотрим равновесие части АС. Распределенную нагрузку, изменяющуюся по линейному закону, заменяем равнодействующей силой Q , модуль которой

$$Q = 4q = 4 \cdot 10 = 40 \text{ Н.}$$

В точке А механическая связь – заделка. Ей соответствуют две составляющие реакции – горизонтальная \vec{R}_{Ax} и вертикальная \vec{R}_{Ay} и пара сил с моментом M_A . Для цилиндрического шарнира С указываем две составляющие реакции – горизонтальную \vec{R}_{Cx} и вертикальную \vec{R}_{Cy} (рисунок 13).

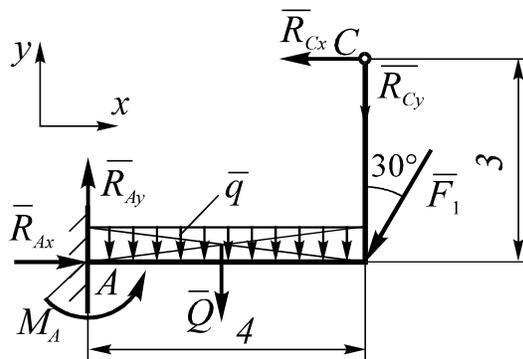


Рисунок 13 – Расчетная схема части АС

Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. Инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					10

На рассматриваемую часть конструкции, действует произвольная плоская система сил. Запишем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - F_1 \cos 60^\circ - R_{Cx} = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - Q - F_1 \cos 30^\circ - R_{Cy} = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; M_A - 2Q - F_{1y} \cdot 4 - R_{Cy} \cdot 4 + R_{Cx} \cdot 3 = 0 \quad (3.3)$$

Здесь $F_{1y} = F_1 \cos 30 = 200 \cdot 0,866 = 173,2 \text{ Н}$.

Рассмотрим равновесие части BC . В точке B конструкция опирается на невесомый стержень. Его реакцию R_B направляем вдоль стержня. Реакция шарнира C включает две составляющие \bar{R}_{Cx} и \bar{R}_{Cy} , которые направляем противоположно направлениям силам \bar{R}_{Cx} и \bar{R}_{Cy} , приложенным к части AC (рисунок 14).

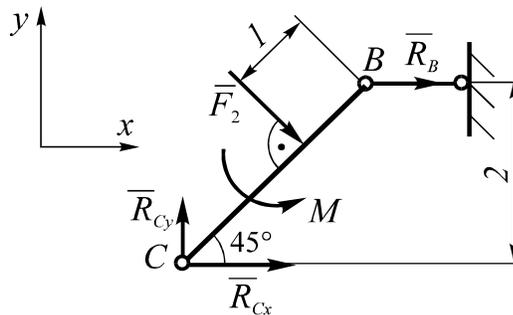


Рисунок 14 – Расчетная схема части CB

На рассматриваемую часть конструкции действует произвольная плоская система сил. Запишем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Cx} + F_2 \cos 45^\circ - R_B = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Cy} - F_2 \cos 45^\circ = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_{Ci} = 0; M - F_2(CB - 1) + R_B \cdot 2 = 0 \quad (3.6)$$

Решаем полученные уравнения равновесия.

Из уравнения (3.6) определяем реакцию стержня R_B

$$R_B = \frac{F_2(CB - 1) - M}{2}.$$

Размер $CB = 2\sqrt{2} = 2,8 \text{ м}$.

Инд. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата

$$R_B = \frac{150(2,8 - 1) - 50}{2} = 110 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.5) находим R_{Cy}

$$R_{Cy} = F_2 \cos 45^\circ = 150 \cdot 0,707 = 106,05 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.4) находим R_{Cx}

$$R_{Cx} = R_B - F_2 \cos 45^\circ = 110 - 150 \cdot 0,707 = 3,95 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.1) находим R_{Ax}

$$R_{Ax} = F_1 \cos 60^\circ + R_{Cx} = 200 \cdot 0,5 + 3,95 = 103,95 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.2) находим R_{Ay}

$$R_{Ay} = Q + F_1 \cos 30^\circ + R_{Cy} = 40 + 200 \cdot 0,866 + 106,05 = 319,25 \text{ Н.}$$

Из уравнения (3.3) находим момент в заделке M_A

$$\begin{aligned} M_A &= 2Q + F_{1y} \cdot 4 + R_{Cy} \cdot 4 - R_{Cx} \cdot 3 = \\ &= 2 \cdot 40 + 4 \cdot 200 \cdot 0,866 + 4 \cdot 106,05 - 3 \cdot 3,95 = 1185,15 \text{ Н} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Для проверки правильности решения рассмотрим равновесие конструкции в целом (рисунок 15).

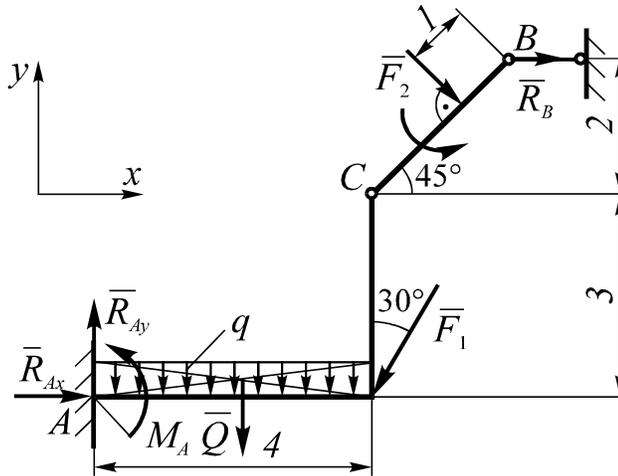


Рисунок 15

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 45^\circ - R_B = 0;$$

$$103,95 - 200 \cdot 0,5 + 150 \cdot 0,707 - 110 = 0 \text{ (верно)}$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - Q - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$319,25 - 40 - 200 \cdot 0,866 - 150 \cdot 0,707 = 0 \text{ (верно)}$$

Инв. № подл.	ПОДП. И ДАТА
Взам. Инв. №	ПОДП. И ДАТА
Инв. № дубл.	ПОДП. И ДАТА

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

