

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет транспорта»

Объект авторского права

УДК 539.3

САЛИЦКИЙ

Владислав Сергеевич

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЯТИСЛОЙНОЙ
КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2026

Работа выполнена в учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Старовойтов Эдуард Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции» учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»;

Официальные оппоненты – **Можаровский Валентин Васильевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» учреждения образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»;

Шафиева Юлия Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Строительные технологии» учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Оппонирующая организация – **Белорусский государственный университет**

Защита состоится 02 июля 2026 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций Д 08.01.02 при учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 240, e-mail: stmech@bk.ru, телефон ученого секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан «1» июня 2026 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций



А.Г. Козел

ВВЕДЕНИЕ

Современная промышленность предъявляет повышенные требования к прочности и материалоемкости используемых элементов конструкций, что стимулирует производство различных композитных материалов. Область применения подобных материалов широка – авиа- и ракетостроение, производство приборов и аппаратуры, строительство зданий и сооружений. В условиях деформации изгиба оптимальными с точки зрения минимизации материала при удовлетворении заданных ограничений на прочность и жесткость являются слоистые конструкции, в частности, трехслойные и пятислойные пластины.

Основные положения теории деформирования упругих слоистых конструкций были разработаны еще в середине XX века, что было вызвано бурным развитием авиакосмического комплекса, сети трубопроводов, транспортного машиностроения, строительства. В это время появляются первые труды А. В. Дятлова, С. Г. Лехницкого, Н. Г. Ченцова. Далее существенный вклад в развитие теории внесли А. Я Александров, С. А. Амбарцумян, В. В. Болотин, И. И. Ворovich, К. З. Галимов, А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, Я. М. Григоренко, В. И. Королев, Л. М. Куршин, Х. М. Муштари, Ю. Н. Новичков, Б. Л. Пелех, А. П. Прусаков, Ю. М. Тарнапольский, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс, А. П. Чулков, М. Р. Bieniek, А. М. Freudenthal, J. K. Ebsioglul, A. C. Eringen, J. I. Foss, L. M. Nabip, W. S. Hemp, E. J. Plantemma, E. Reissner, J. Solvey, M. Stein, J. Mayers, Wang-The и др. Существенный вклад внесли исследователи нашей страны: М. А. Журавков, Д. В. Леоненко, Г. И. Михасев, В. В. Можаровский, Ю. М. Плескачевский, В. Е. Старжинский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая.

В связи с интенсивным использованием слоистых материалов и конструкций актуальным становится разработка для них новых механико-математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС), учитывающих разнообразие нагрузок и физически нелинейных свойств материалов слоев. Необходимо отметить, что до настоящего времени деформирование пятислойных круговых пластин с двумя заполнителями не исследовалось, этому и посвящена диссертационная работа.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертации соответствует п. 1 «Цифровые информационно-коммуникационные и междисциплинарные технологии, основанные на них производства. Математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных)» перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности Республики Беларусь на 2021–2025 годы (утверждено Указом Президента Республики Беларусь от 7 мая 2020 г. № 156).

Работа входила составной частью в ГПНИ «Конвергенция-2025». Задание 1.7 «Математические модели процессов физически нелинейного деформирования композитных конструкций», № ГР 20212307, 01.04.2021–31.12.2025.

Цели, задачи, объект и предмет исследования

Целью исследования является разработка и анализ механико-математических моделей деформирования упругих и физически нелинейных симметричных и несимметричных по толщине пятислойных круговых пластин под действием осесимметричных нагрузок при различных граничных условиях.

Задачи исследования:

- изучить отечественные и зарубежные публикации последних лет о деформировании неоднородных элементов конструкций под действием силовых нагрузок различных видов, провести анализ работ, посвященных изгибу слоистых пластин;
- разработать постановки краевых задач об изгибе упругих и физически нелинейных круговых пятислойных пластин с двумя относительно толстыми заполнителями и тремя тонкими несущими слоями под действием осесимметричных нагрузок различного вида, вывести уравнения равновесия и сформулировать граничные условия;
- разработать методы решения соответствующих краевых задач, получить аналитические решения в конечном и итерационном видах, исследовать воздействие непрерывных и локальных нагрузок;
- провести численную апробацию полученных аналитических решений и параметрический анализ НДС в зависимости от упругих параметров несущих слоев, физической нелинейности материалов, асимметрии пластины по толщине, величины и вида нагрузки.

Объектом исследования являются круговые пятислойные симметричные и несимметричные по толщине пятислойные пластины.

Предмет исследования: напряженно-деформированное состояние рассматриваемых упругих и физически нелинейных пятислойных пластин.

Научная новизна

Разработаны новые механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования круговых симметричных и несимметричных по толщине пятислойных пластин, отличающиеся учетом наличия двух заполнителей и количеством разрешающих уравнений равновесия; получены новые аналитические решения ряда краевых задач при непрерывных и локальных нагрузках, представлена их численная апробация.

Положения, выносимые на защиту

- механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования круглых симметричных и несимметричных по толщине пятислойных пластин, учитывающие наличие двух заполнителей;
- аналитические решения задач об изгибе упругих круговых симметричных и несимметричных по толщине пятислойных пластин под действием осесимметричных непрерывных и локальных нагрузок, при граничных условиях заделки и шарнирного опирания контура;
- расчетные формулы для внутренних усилий, перемещений, деформаций и напряжений, которые позволяют проводить параметрический анализ НДС при

изгибе упругих пятислойных пластин жестко закрепленных или шарнирно открытых по контуру;

- рекуррентные решения краевых задач об изгибе физически нелинейных симметричных и несимметричных по толщине круговых пятислойных пластин, при различных условиях закрепления контура;

- результаты численного параметрического анализа напряженно-деформированного состояния, включающие графики перемещений, деформаций и напряжений в зависимости от вида и величины нагрузки, механических свойств материалов слоев пластины, асимметрии пластины по толщине и материалам слоев, типа граничных условий.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные научные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений исследования и в обсуждении полученных результатов. Совместно с научным руководителем опубликовано три статьи [5, 7, 9], материалы конференции [18].

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- XXVII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Вятичи, 2021);

- XII, XIII и XIV Международных научно-практических конференциях «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2022, 2024, 2025);

- Международной научной конференции: Механика, Сейсмостойкость, Машиностроение по проблемам «Обеспечения сейсмической безопасности и сейсмостойкости зданий и сооружений, решению прикладных задач механики» (Ташкент, 2024);

- III республиканском форуме молодых ученых учреждений высшего образования (Брест, 2024);

- Международной научной конференции Вычислительная механика для гранулированных и геоматериалов (Минск, 2024).

Основные аспекты диссертации доложены и обсуждены на научно-методическом семинаре кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции» БелГУТа, протокол № 2 от 21.03.2026.

Отдельные результаты исследований приняты к использованию в ОАО «Электроаппаратура» для расчета прочности и долговечности корпусных композиционных элементов конструкций и в Испытательном центре железнодорожного транспорта БелГУТа для расчета элементов перегородок пассажирских вагонов локомотивной тяги и моторвагонного подвижного состава.

Опубликование результатов диссертации

По теме диссертации опубликовано 18 работ, в том числе 9 статей в научных изданиях, включенных в перечень ВАК, 9 материалов конференций (1 – Scopus), общим объемом 5,6 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, перечня условных обозначений, пяти глав, заключения, библиографического списка, приложения. Полный объем диссертации составляет 127 страниц машинописного текста, в том числе: 49 рисунков, 2 таблицы, список использованных источников из 90 наименований на 8 страницах, список публикаций автора из 18 наименований на 3 страницах, приложения на 2 страницах.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе приведен обзор и выполнен анализ публикаций в области расчета слоистых конструкций за последние 10 лет. Показано, что к неисследованным проблемам, в частности, относятся задачи об изгибе круглых упругих и физически нелинейных пятислойных пластин, решению которых и посвящена данная работа.

Во второй главе предложена механико-математическая модель упругого осесимметричного деформирования пятислойной круговой пластины *симметричной по толщине* – сэндвич пластины (рисунок 1). Приведены постановки краевых задач в усилиях и перемещениях, сформулированы граничные условия при различных видах закрепления контура, получены аналитические решения и проведена их численная апробация.

Предполагается, что на упругую пятислойную круговую пластину (рисунок 1) действует осесимметричная поверхностная нагрузка $q(r)$. Постановка задачи и ее решение проведено в цилиндрической системе координат. Срединная плоскость центрального несущего слоя принята за координатную. Для тонких изотропных несущих слоев толщиной h_1 , $h_2 = h_4$ принимаются гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности слоя. Для относительно толстых жестких несжимаемых по толщине заполнителей ($h_5 = h_3$) применяется модель Тимошенко, при этом деформированная нормаль в каждом из заполнителей остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев $\psi(r_0) = 0$.

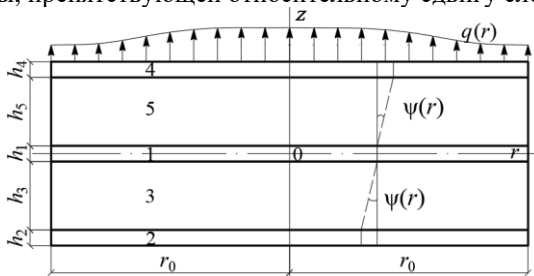


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной сэндвич пластины

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_{\phi}^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в

заполнители ψ (искомые функции) не зависят от координаты φ . Радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ выражены через эти искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -z w_{,r} + h_3 \psi, & 0, 5h_1 + h_3 \leq z \leq 0, 5h_1 + h_3 + h_2; \\ u_r^{(5)} &= -z w_{,r} + (z - 0, 5h_1) \psi, & 0, 5h_1 \leq z \leq 0, 5h_1 + h_3; \\ u_r^{(1)} &= -z w_{,r}, & -0, 5h_1 \leq z \leq 0, 5h_1; \\ u_r^{(3)} &= -z w_{,r} + (z + 0, 5h_1) \psi, & -0, 5h_1 - h_3 \leq z \leq -0, 5h_1; \\ u_r^{(2)} &= -z w_{,r} - h_3 \psi, & -0, 5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0, 5h_1 - h_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши, напряжения из закона Гука. Система дифференциальных уравнений равновесия пластины в перемещениях получена с помощью вариационного принципа Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2h_3 G_3 \psi &= 0, \\ L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q. \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты и дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_5 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 &= \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_7 &= \left[2K_2^- h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \end{aligned}$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k;$$

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g)), \quad ,_r \equiv g_{,rr} + \frac{2g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (2) граничных условий на контуре и условий ограниченности решения в центре пластины. При жесткой заделке контура ($r = r_0$) должны выполняться условия

$$\psi(r_0) = 0, \quad w(r_0) = 0, \quad w_{,r}(r_0) = 0. \quad (3)$$

При шарнирном опирании:

$$\psi(r_0) = 0, \quad w(r_0) = 0, \quad M_r(r_0) = 0. \quad (4)$$

Аналитическое решение системы (2) получено при осесимметричной нагрузке. При равномерно распределённой нагрузке q и закреплённом контуре

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_5 q}{4a_6 h_3 G_3} \left(\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta r_0)} r_0 - r \right), \\ w &= \frac{a_5^2 q}{4a_6^2 h_3 G_3} \left(r_0 \frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta r_0)}{\beta I_1(\beta r_0)} - \frac{r^2 - r_0^2}{2} \right) + \frac{q}{64a_6} (r^2 - r_0^2)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

При шарнирном опирании контура изменится только прогиб:

$$w = \frac{a_5^2 q}{4a_6^2 h_3 G_3} \left(r_0 \frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta r_0)}{\beta I_1(\beta r_0)} - \frac{r^2 - r_0^2}{2} \right) + \frac{q}{64a_6} (r^4 - r_0^4) - \frac{q r_0^2 (3a_6 + a_7)}{32a_6 (a_6 + a_7)} (r^2 - r_0^2).$$

Численные результаты получены для защемлённой по контуру пятислойной круговой сэндвич пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$ м). В качестве базовой расчетной модели принята пластина: Д16-Т-фторопласт-Д16-Т-фторопласт-Д16-Т, толщины слоев которой $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$ м, $h_3 = h_5 = 0,1$ м. Величина нагрузки $q_0 = -1$ МПа.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение перемещений вдоль радиуса пластины при различных материалах внешних несущих слоев. При замене в несущих слоях дюралюминия на титан прогиб уменьшается примерно на 6,3 %. При использовании для внешних несущих слоев кордиерита прогиб уменьшается на 36,7 %.

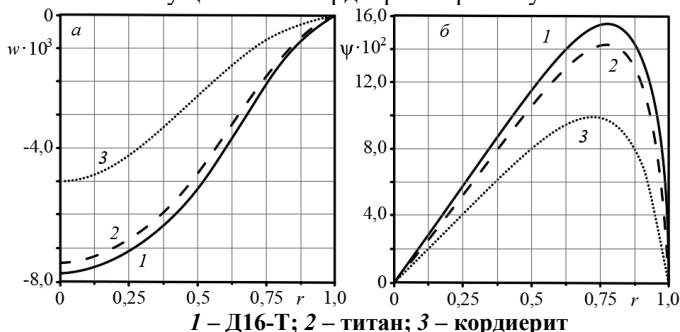


Рисунок 2 – Перемещения при различных материалах несущих слоёв
а – прогиб, м; б – относительный сдвиг

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость перемещений в пластине с дюралюминиевыми несущими слоями от материала заполнителя. При замене фторопластовых заполнителей на пенопласт прогиб увеличивается примерно в 4,2 раза, на пенополиуретан – 6,1 раз.

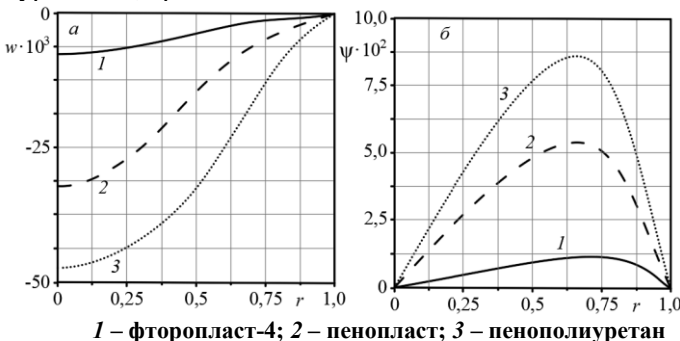
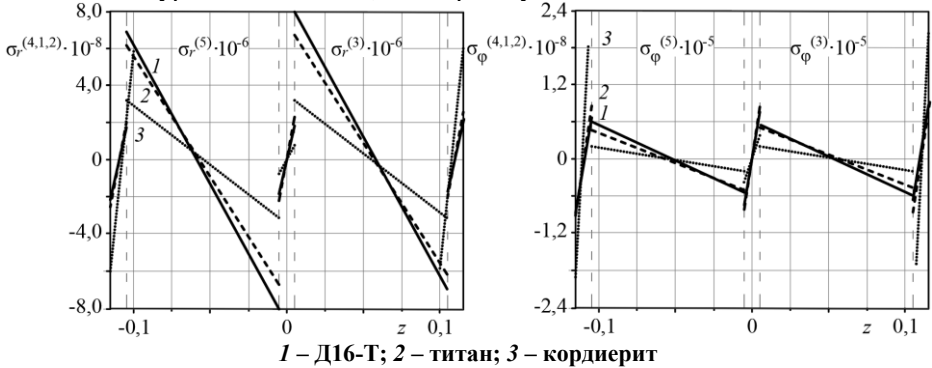


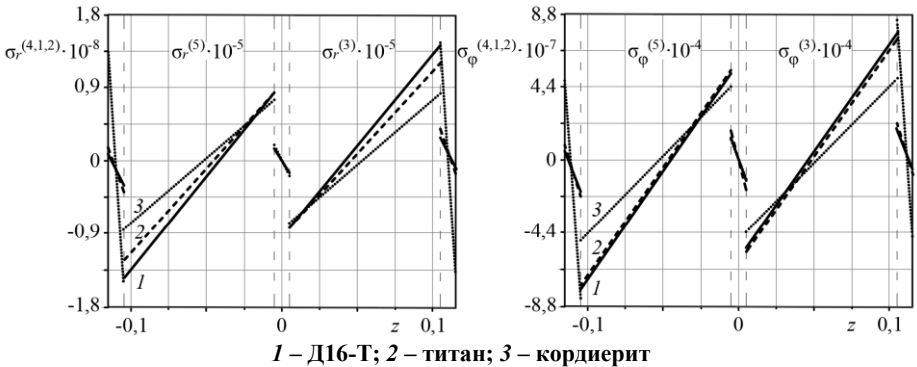
Рисунок 3 – Перемещения при различных материалах заполнителя
а – прогиб, м; б – относительный сдвиг

Изменение напряжений в пятислойных пластинках с различными материалами внешних несущих слоев иллюстрируют рисунки 4 (на контуре), 5 (в цен-

тре). Радиальные напряжения в обоих случаях больше окружных примерно в два раза. По сравнению с дюралюминиевыми несущими слоями в титановых слоях напряжения на контуре увеличиваются на 12,7%, в кордиеритовых – на 150 %. В центре пластины максимальное увеличение напряжений наблюдается в 4,7 раза. В заполнителях напряжения падают при увеличении жесткости несущих слоев на контуре незначительно, в центре – существенно.



1 – Д16-Т; 2 – титан; 3 – кордиерит
Рисунок 4 – Напряжения при различных материалах несущих слоёв
a – радиальные; *b* – окружные (на контуре)



1 – Д16-Т; 2 – титан; 3 – кордиерит
Рисунок 5 – Напряжения при различных материалах несущих слоёв
a – радиальные; *b* – окружные (в центре)

Пусть на рассматриваемую пятислойную пластину действует локальная поверхностная нагрузка, равномерно распределённая по кругу радиуса $r \leq b$

$$q(r) = q_0 H_0(b - r), \quad (6)$$

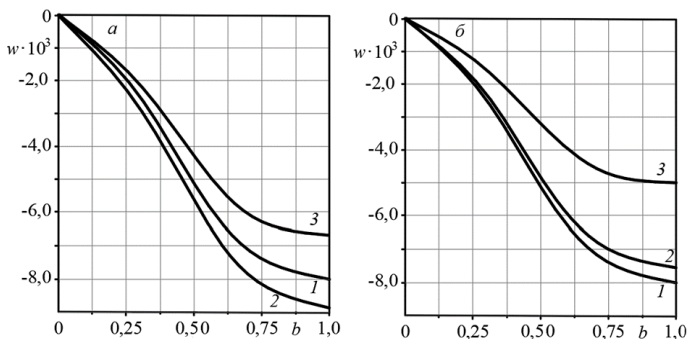
где $H_0(r)$ – функция Хэвисайда.

В этом случае решение (5) для рассматриваемой пластины принимает вид

$$\psi = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left\{ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right) + b I_1(\beta b) K_1(\beta r) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{H_0(b-r)}{2} \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] - \frac{b^2}{2r} \Big\}, \\
w = & \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left\{ \frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) - \frac{b^2 I_0(\beta)\beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{bI_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{bI_1(\beta b)K_0(\beta r)}{\beta} - \right. \\
& - \frac{b^2}{2} \ln(r) \frac{H_0(b-r)}{2} \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \Big\} + \\
& + \frac{q_0}{8a_6} \left\{ \left(\frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - b^2 r^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) H_0(b-r) + \right. \\
& \left. + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Зависимость прогиба (7) от величины радиуса пятна b круговой нагрузки (6) показана на рисунке 6 при различной толщине центрального несущего слоя и различных материалах несущих слоёв. Уменьшение толщины внутреннего несущего слоя в 2 раза приводит к увеличению прогиба на 11,4 процента. Увеличение толщины внутреннего несущего слоя уменьшает прогиб на 15,2 процента. По сравнению с дюралюминиевыми при титановых несущих слоях максимальный прогиб уменьшается на 6,2 %, при кордиеритовых – на 37,5 %.



1 – $h_1 = 0,02$; 2 – $h_1 = 0,01$; 3 – $h_1 = 0,03$ 1 – Д16-Т; 2 – титан; 3 – кордиерит

Рисунок 6 – Зависимость прогиба пластины от радиуса пятна нагрузки

а – при различной толщине внутреннего несущего слоя;

б – при разных материалах внешних несущих слоёв

В диссертации также исследован изгиб пластины при кольцевых и погонных нагрузках. Приведены соответствующие аналитические и численные результаты.

В третьей главе приведены постановка и итерационное решение задачи об изгибе физически нелинейной пятислойной круговой сэндвич пластины. Кинематика пакета соответствует ранее принятым гипотезам ломаной линии. Связь напряжений и деформаций в несущих слоях описывается соотношениями тео-

рии малых упругопластических деформаций Ильюшина, которые при прямом нагружении справедливы и для нелинейно упругих материалов заполнителей:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)})\right) \vartheta_{\alpha}^{(k)}, \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \left(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})\right) \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad s_{rz}^{(5)} = 2G_5 \left(1 - \omega_5(\varepsilon_u^{(5)})\right) \vartheta_{rz}^{(5)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (8)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, s_{rz}^{(5)}, \vartheta_{\alpha}^{(3)}$ – девиаторные и $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;

$\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности и физической нелинейности;

$\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций.

Система дифференциальных уравнений равновесия пластины (2) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2h_3 G_3 \psi &= h_{\omega}, \\ L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q + q_{\omega}, \end{aligned} \quad (9)$$

где в члены с индексом « ω » включены добавки, отражающие физическую нелинейность материалов несущих слоев и заполнителей.

Система уравнений (9) является нелинейной, поэтому для ее решения используется метод «упругих» решений Ильюшина. В этом случае она представляется в итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) - 2h_3 G_3 \psi^{(n)} &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_3(a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где n – номер приближения;

$$h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)} \text{,}_r + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)}) - Q_{\omega}^{(n-1)}, \quad q_{\omega}^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)} \text{,}_{rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega}^{(n-1)} \text{,}_r - M_{\varphi\omega}^{(n-1)} \text{,}_r),$$

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^5 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} dz,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^5 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = h_3 \left(T_{\alpha\omega}^{(4,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)} \right) - 0.5 h_1 \left(T_{\alpha\omega}^{(5,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} \right) + M_{\alpha\omega}^{(5,n-1)} + M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)},$$

$$Q_{\omega}^{(n-1)} = G_3 \int_{-h_1/2-h_3}^{-h_1/2} \omega_3(\varepsilon_u^{(3,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(3,n-1)} dz + 2G_5 \int_{h_1/2}^{h_1/2+h_5} \omega_5(\varepsilon_u^{(5,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(5,n-1)} dz \quad (\alpha = r, \varphi).$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (10) граничных условий типа (3), (4). Итерационное решение задачи об изгибе рассматриваемой пластины с учетом условий его ограниченности в начале координат будет

$$\psi^{(n)} = C_2^{(n)} I_1(\beta r) + \psi_r^{(n)},$$

$$w^{(n)} = \frac{a_5}{a_6} \int \Psi^{(n)} dr + \frac{1}{a_6} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{C_5^{(n)}}{4} r^2 + C_4^{(n)}. \quad (11)$$

где оставшиеся константы интегрирования при жесткой заделке контура пластины, на каждом шаге приближения имеют вид

$$C_2^{(n)} = - \left. \frac{\Psi_r}{I_1(\beta r_0)} \right|_{r=r_0}, \quad C_5^{(n)} = - \left. \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right|_{r=r_0},$$

$$C_4^{(n)} = - \frac{a_5}{a_6} \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r_0) + \int \Psi_r dr \Big|_{r=r_0} \right) - \frac{1}{a_6} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \frac{C_5^{(n)}}{4} r_0^2.$$

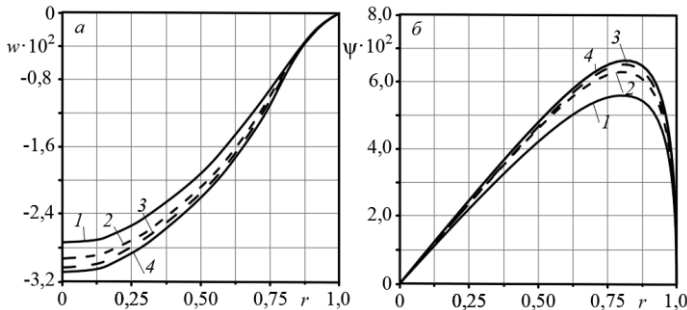
При численных исследованиях решения (11) функции пластичности и нелинейности в соотношениях (8) принимаются в известном виде:

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_u^{(k)}, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}, \end{cases} \quad (12)$$

где A_k, α_k – константы материалов, определяемые из эксперимента.

В качестве материала несущих слоев при расчетах принят алюминиевый сплав Д16Т; материал заполнителей – фторопласт-4. Константы нелинейности, включенные в формулу (12) известны: для Д16Т $-A_1 = 0,96; \alpha_1 = 2,34; \varepsilon_y^{(1)} = 0,18 \%$; для фторопласта $-A_3 = 0,905; \alpha_3 = 1,48; \varepsilon_s = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3 \%$. Геометрические параметры пластины отнесены к её радиусу r_0 . При расчетах принималась величина нагрузки $q = -20$ МПа; пластина единичного радиуса, защемлённая по контуру, с толщинами слоев $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$ м, $h_3 = 0,1$ м.

Графики на рисунке 7 подтверждает практическую сходимость метода «упругих» решений применительно к пятислойной пластине.



1, 2, 3 – приближения; 4 – физически нелинейные перемещения
Рисунок 7 – Сходимость метода упругих решений
a – прогиб; б – относительный сдвиг

Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение для прогиба отличается от предыдущего примерно на 10 %. Третье приближение превосходит второе на 4 %. Четвертое, принятое за искомое физически нелинейное перемещение, отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Анало-

гичная картина наблюдается и для относительного сдвига в заполнителях. Таким образом, учет физической нелинейности материалов слоев увеличивает искомые перемещения примерно на 14,8 %.

Распределение областей пластических деформаций и физической нелинейности в слоях по поперечному сечению пластины при различных интенсивностях силовой нагрузки показано на рисунке 8, $a - q = -3,5$ МПа, $b - q = -6,0$ МПа. Первые пластические деформации образуются в несущих слоях на контуре пластины. При увеличении нагрузки они распространяются по глубине и ширине, появляются в центре внешних несущих слоев. Физическая нелинейность заполнителей определяется, в основном, значениями деформации относительного сдвига на участке $0,43 < r < 0,93$. При удвоении нагрузки они достигают контура пластины.

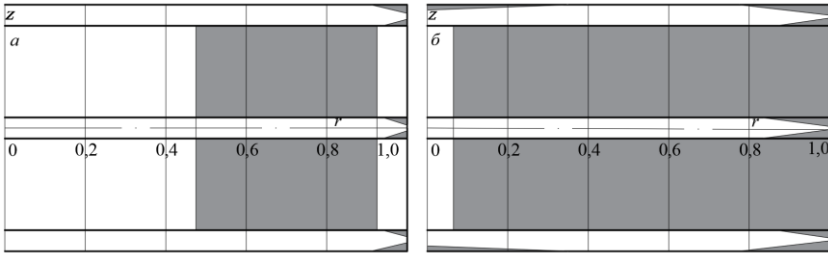


Рисунок 8 – Области пластичности и физической нелинейности в слоях $a - q = -3,5$ МПа; $b - q = -6$ МПа

Детализация изменения напряжений на контуре пластины по толщине несущих слоев при упругопластическом деформировании показана на рисунке 9: a – нижний слой; b – центральный, $в$ – верхний. Нумерация кривых прежняя. Вертикальные линии обозначают границы слоев. Напряжения в несущих слоях уменьшаются за счет упругопластического деформирования примерно на 9 %.

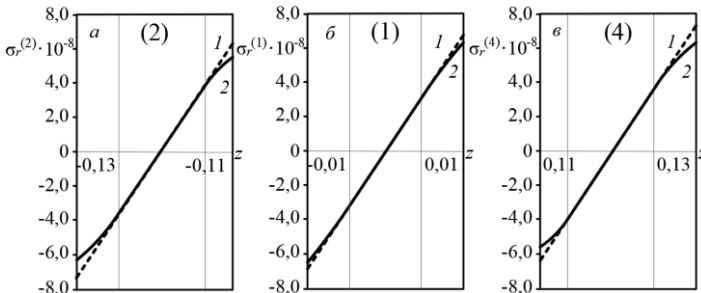


Рисунок 9 – Радиальные напряжения в несущих слоях пластины a – нижний слой; b – центральный, $в$ – верхний

В заполнителях при $r = 0,7$ уменьшение напряжений, определяемое физической нелинейностью материала, составляет порядка 12 %.

В четвертой главе рассматривается несимметричная по толщине упругая пятислойная круговая пластина (рисунок 10), находящаяся под действием осе-

симметричной поперечной поверхностной нагрузки $q = q(r)$. Кинематика пластины соответствует модели, введенной в разд. 2.

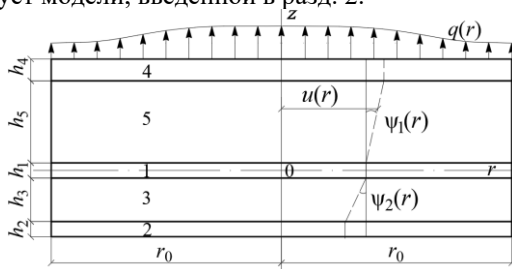


Рисунок 10 – Расчётная схема пятислойной несимметричной пластины

Вследствие асимметрии пластины относительные сдвиги в заполнителях будут различными $\psi_1(r) \neq \psi_2(r)$, к искомому прогибу $w(r)$ еще добавится радиальное перемещение $u(r)$ срединной плоскости центрального слоя. Радиальные перемещения $u_r^{(k)}$ в слоях выражаются через четыре искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5\psi_1, & 0,5h_1 + h_5 \leq z \leq 0,5h_1 + h_4; \\ u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi_1, & 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5; \\ u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, & -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1; \\ u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi_2, & -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1; \\ u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\psi_2, & -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия принимает вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi_1 - a_3\psi_2 - a_4w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2u + a_5\psi_1 - a_6w_{,r}) - h_5G_5\psi_1 &= 0, \\ L_2(-a_3u + a_7\psi_2 - a_8w_{,r}) - h_3G_3\psi_2 &= 0, \\ L_3(a_4u + a_6\psi_1 + a_8\psi_2 - a_9w_{,r}) &= -q, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты a_i определяются формулами подобными, введенным в (2).

Из системы уравнений (14) после ряда преобразований выделено дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения ψ_1 :

$$L_2 L_2(\psi_1) - 2A_1^2 L_2(\psi_1) + A_2^4 \psi_1 = f. \quad (15)$$

Здесь коэффициенты A_1^2 , A_2^4 и функция f зависят от геометрических и упругих характеристик материалов слоев, причем коэффициенты остаются положительными при изменении толщин слоев, а в f включена внешняя нагрузка.

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (15), сведено к решению системы из двух модифицированных дифференциальных уравнений Бесселя второго порядка. После их решения общее решение системы уравнений (14), с учетом (13) и ограниченности в начале координат, получено в виде

$$w = -\left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2}\right) \int \psi_{1,r} dr - \frac{\gamma_2 (b_2^2 - b_1 b_3)}{h_3 G_3 b_2} \int L_2(\psi_{1,r}) dr - \gamma_2 \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} \int L_1^{-1}(q) dr -$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma \int L_3^{-1}(q) dr - \frac{C_2 I_0(\beta_1 r)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) - \frac{C_4 I_0(\beta_2 r)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + C_8; \\
& \psi_1 = \psi_{1r} + C_2 I_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r); \\
\psi_2 = & \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \psi_{1r} + \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\psi_{1r}) + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} L_1^{-1}(q) + C_2 k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4 k_2 I_1(\beta_2 r); \\
u = & -\frac{a_4}{a_1} w_{,r} + \frac{a_2}{a_1} \psi_1 - \frac{a_3}{a_1} \psi_2 + C_9 r + \frac{C_{10}}{r}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где $\beta_1, \beta_2, b_1, b_2, b_3$ – параметры, выраженные через коэффициенты a_i .

Константы интегрирования C_i получены в диссертации из граничных условий при $q = \text{const}$ при защемленном и шарнирно опертом контурах.

Радиальные и окружные напряжения в слоях определяются выражениями

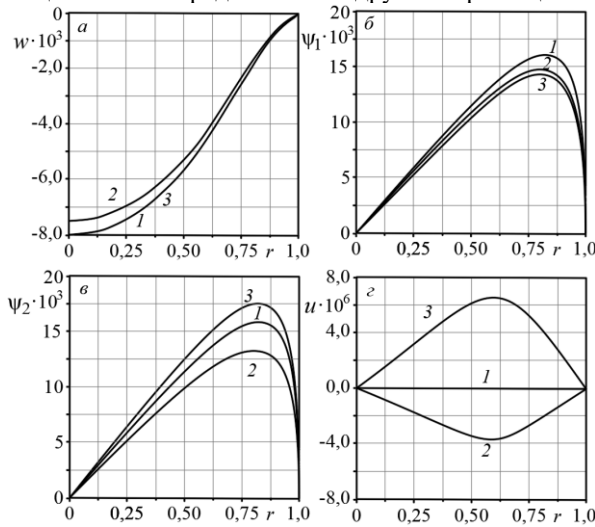
$$\sigma_r = \begin{cases} K_4^+(u_{,r} - zw_{,rr} + h_5 \psi_{1,r}) + K_4^- \frac{1}{r} (u - zw_{,r} + h_5 \psi_1); & \frac{h_1}{2} + h_5 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ K_5^+(u_{,r} - zw_{,rr} + (z - \frac{h_1}{2}) \psi_{1,r}) + K_5^- \frac{1}{r} (u - zw_{,r} + (z - \frac{h_1}{2}) \psi_1); & \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5; \\ K_1^+(u_{,r} - zw_{,rr}) + K_1^- \frac{1}{r} (u - zw_{,r}); & -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\ K_3^+(u_{,r} - zw_{,rr} + (z + \frac{h_1}{2}) \psi_{2,r}) + K_3^- \frac{1}{r} (u - zw_{,r} + (z + \frac{h_1}{2}) \psi_2); & -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \\ K_2^+(u_{,r} - zw_{,rr} - h_3 \psi_{2,r}) + K_2^- \frac{1}{r} (u - zw_{,r} - h_3 \psi_2); & -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3. \end{cases}$$

$$\sigma_\phi = \begin{cases} K_4^-(u_{,r} - zw_{,rr} + h_5 \psi_{1,r}) + K_4^+ \frac{1}{r} (u - zw_{,r} + h_5 \psi_1); & \frac{h_1}{2} + h_5 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ K_5^-(u_{,r} - zw_{,rr} + (z - \frac{h_1}{2}) \psi_{1,r}) + K_5^+ \frac{1}{r} (u - zw_{,r} + (z - \frac{h_1}{2}) \psi_1); & \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5; \\ K_1^-(u_{,r} - zw_{,rr}) + K_1^+ \frac{1}{r} (u - zw_{,r}); & -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\ K_3^-(u_{,r} - zw_{,rr} + (z + \frac{h_1}{2}) \psi_{2,r}) + K_3^+ \frac{1}{r} (u - zw_{,r} + (z + \frac{h_1}{2}) \psi_2); & -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \\ K_2^-(u_{,r} - zw_{,rr} - h_3 \psi_{2,r}) + K_2^+ \frac{1}{r} (u - zw_{,r} - h_3 \psi_2); & -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3. \end{cases}$$

Численные результаты получены для зашемлённой по контуру несимметричной по толщине пятислойной круговой пластины единичного радиуса. За базовую расчетную модель принята пластина, слои которой набраны из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т, толщины слоев следующие $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$ м, $h_3 = h_5 = 0,1$ м. Величина нагрузки $q_0 = -1$ МПа. Перемещения вычислялись по формулам (16).

Рисунок 11 иллюстрирует изменение вдоль радиуса пластины прогиба w , относительных сдвигов ψ_1 и ψ_2 , радиального перемещения $u(r)$ при асимметрии пластины по толщине слоев. В случае увеличения толщины верхнего несущего слоя (2) за счет нижнего максимальный прогиб уменьшается примерно на 5%, относительный сдвиг в верхнем заполнителе (ψ_1) уменьшается на 4,7 %, в нижнем (ψ_2) – на 16,5 %. Асимметрия пластины за счет заполнителей (3) достигается перераспределением материала из нижнего заполнителя в верхний. По сравне-

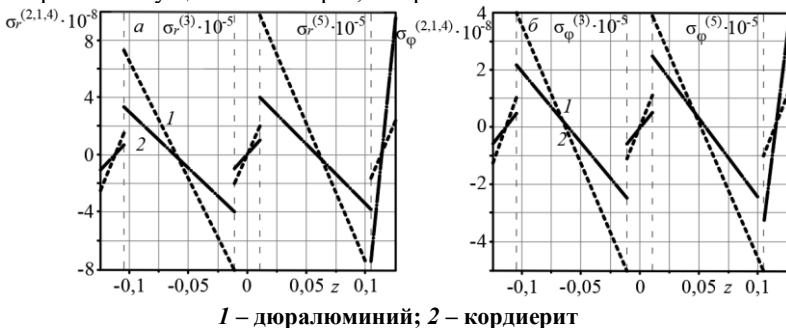
нию с базовой моделью (1) прогиб при этом практически не изменился, относительный сдвиг ψ_1 уменьшился на 6,1 %, сдвиг ψ_2 – увеличивается на 11,6 %. Радиальное перемещение на 3 порядка меньше других перемещений.



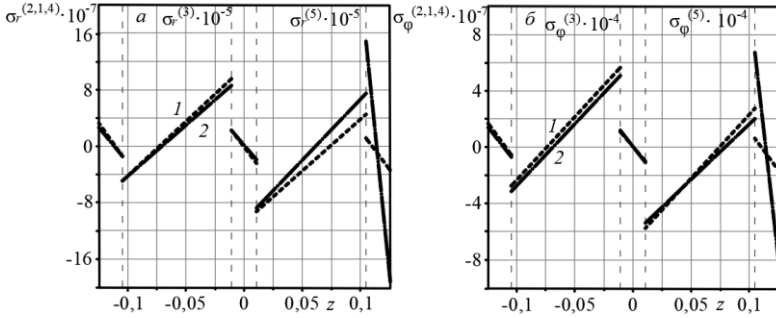
1 – $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02, h_3 = h_5 = 0,1$; 2 – $h_1 = 0,02, h_2 = 0,01, h_4 = 0,03, h_3 = h_5 = 0,1$;
3 – $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02, h_3 = 0,05, h_5 = 0,15$

Рисунок 11 – Влияние асимметрии пластины по толщине на перемещения
а – прогиб; б, в — относительные сдвиги в верхнем и нижнем заполнителях;
г – радиальное перемещение

Напряжения при асимметрии пластины по материалу верхнего несущего слоя показаны на рисунках 12 (на контуре), 13 (в центре). Толщины слоев $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02, h_3 = h_5 = 0,1$. Замена дюралюминия на кордиерит (2) приводит к заметному росту напряжений $\sigma_r^{(k)}$ на контуре в верхнем несущем слое (примерно в 4 раза) и существенному их падению в остальных слоях. Окружные напряжения изменяются подобным образом. В центре пластины напряжения увеличиваются в верхнем несущем слое в 5 раз, в верхнем заполнителе на 76 %.



1 – дюралюминий; 2 – кордиерит
Рисунок 12 – Напряжения при различных материалах верхнего несущего слоя
а – радиальные; б – окружные (на контуре)



1 – дюралюминий; 2 – кордиерит
 Рисунок 13 – Напряжения при различных материалах верхнего несущего слоя
 а – радиальные; б – окружные (в центре)

В пятой главе рассматривается несимметричная по толщине физически нелинейная пятислойная круговая пластина, находящаяся под действием осесимметричной поперечной поверхностной нагрузки $q(r)$. Кинематика пакета соответствует гипотезам ломаной линии. Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций (8). Для решения применен метод упругих решений, который позволяет итерационную систему уравнений равновесия в перемещениях выписать в виде

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi_1^{(n)} - a_3 \psi_2^{(n)} - a_4 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_5 \psi_1^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) - h_5 G_3 \psi_1^{(n)} &= h_{1\omega}^{(n-1)}, \\ L_2(-a_3 u^{(n)} + a_7 \psi_2^{(n)} - a_8 w_{,r}^{(n)}) - h_3 G_3 \psi_2^{(n)} &= h_{2\omega}^{(n-1)}, \\ L_3(a_4 u^{(n)} + a_6 \psi_1^{(n)} + a_8 \psi_2^{(n)} - a_9 w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{1\omega}^{(n-1)}$, $h_{2\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ – нелинейные добавки, вычисляемые по результатам предыдущего приближения.

Общее рекуррентное решение системы уравнений (17) следующее:

$$\begin{aligned} \psi_1^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta_1 r) + C_4^{(n)} I_1(\beta_2 r) + \psi_{1r}^{(n)}, \\ \psi_2^{(n)} &= C_2^{(n)} k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4^{(n)} k_2 I_1(\beta_2 r) + \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\psi_{1r}^{(n)}) + \frac{b_3 h_3 G_5}{b_2 h_3 G_3} \psi_{1r}^{(n)} + \\ &+ \frac{b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)}}{b_2 h_3 G_3} + \frac{b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1}{b_2 h_3 G_3} \left(L_1^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{C_1^{(n)}}{r} + \frac{a_4}{a_1} p_{\omega}^{(n-1)} \right) - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1 b_2 h_3 G_3} p_{\omega}^{(n-1)}, \\ w^{(n)} &= - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{b_3 h_3 G_5}{b_2 h_3 G_3} \right) \int \psi_{1r}^{(n)} dr - \frac{\gamma_2 (b_2^2 - b_1 b_3)}{b_2 h_3 G_3} \int L_2(\psi_{1r}^{(n)}) dr - \frac{\gamma_2 (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{b_2 h_3 G_3} \times \\ &\times \left(\int \left(L_1^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{C_1^{(n)}}{r} \right) dr + \frac{a_4}{a_1} \int p_{\omega}^{(n-1)} dr \right) - \frac{\gamma_2}{b_2 h_3 G_3} \left(b_3 \int h_{1\omega}^{(n-1)} dr - b_2 \int h_{2\omega}^{(n-1)} dr - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1} \int p_{\omega}^{(n-1)} dr \Big) - \gamma \left(\int \left(L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{C_1^{(n)} r}{4} (2 \ln r - 1) \right) dr + \frac{a_4}{a_1} \int L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) dr \right) - \\
& - C_2^{(n)} \frac{I_0(\beta_1 r)(\gamma_1 + \gamma_2 k_1)}{\beta_1} - C_4^{(n)} \frac{I_0(\beta_2 r)(\gamma_1 + \gamma_2 k_2)}{\beta_2} + \frac{C_6^{(n)} r^2}{2} + C_7^{(n)} \ln r + C_8^{(n)}, \\
& u^{(n)} = \left(\frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1} \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} - \frac{a_2 + a_4 \gamma_1}{a_1} \right) \Psi_{1r}^{(n)} + \frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1} \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) + \quad (18) \\
& + \frac{L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)})}{a_1} - \frac{a_4}{a_1} \gamma \left(L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{C_1^{(n)} r}{4} (2 \ln r - 1) + \frac{a_4}{a_1} L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \right) + \frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1 b_2 h_3 G_3} \times \\
& \times \left(b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)} + (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1) \left(L_1^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{C_1^{(n)}}{r} + \frac{a_4}{a_1} p_{\omega}^{(n-1)} \right) - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1} p_{\omega}^{(n-1)} \right) + \\
& + \frac{a_2 + \gamma_1 a_4 - k_1 (a_3 - \gamma_2 a_4)}{a_1} C_2^{(n)} I_1(\beta_1 r) + \frac{a_2 + \gamma_1 a_4 - k_2 (a_3 - \gamma_2 a_4)}{a_1} C_4^{(n)} I_1(\beta_2 r) + C_9^{(n)} r + \frac{C_{10}^{(n)}}{r}.
\end{aligned}$$

На рисунке 13 показано изменение вдоль радиуса перемещений (18) в заземленной по контуру пластине.

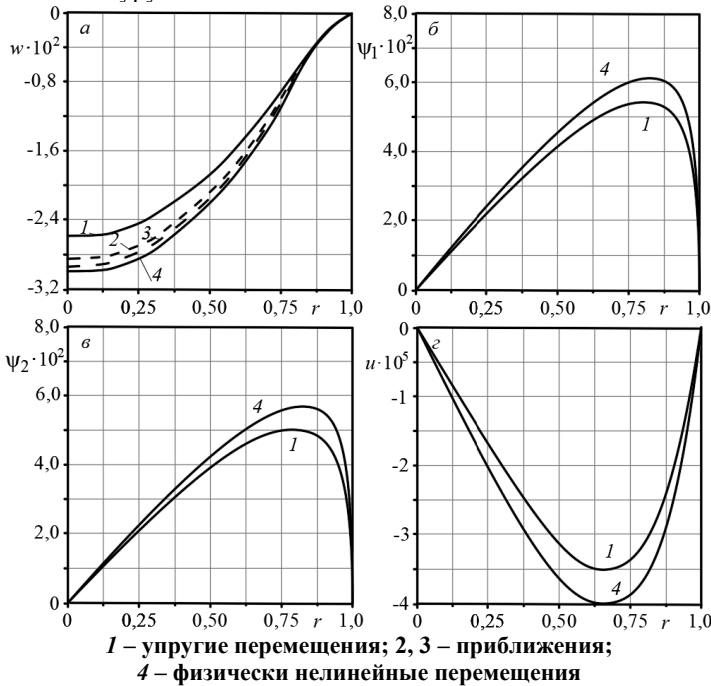


Рисунок 13 – Перемещения в физически нелинейной несимметричной по толщине пластине: а – прогиб; б – относительный сдвиг в верхнем заполнителе; в – относительный сдвиг в нижнем заполнителе; z – радиальное перемещение

Здесь упругие прогиб и относительные сдвиги на 5 % меньше, чем у симметричной пластины, что приводит к уменьшению интенсивности деформаций и меньшему росту перемещений при учете физической нелинейности материалов слоев – 12,8 %. Радиальные перемещения на три порядка меньше прогиба и сдвигов, поэтому на пластическое деформирование влияния практически не оказывают. Таким образом, учет физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению параметров НДС пятислойной круговой пластины при изгибе.

Численная верификация расчетной модели пятислойной пластины была проведена сопоставлением с известными опубликованными результатами для трехслойных пластин.

Графики прогиба $w(r)$ и относительного сдвига $\psi(r)$, рассчитанные по формулам для пятислойной пластины с параметрами $h_1 = 0$, $h_2 = h_4 = 0,04$, $h_3 = h_5 = 0,2$, практически совпали с аналогичными графиками для трехслойной пластины с такими же характеристиками¹, но рассчитанными по приведенным там формулам для трехслойных пластин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В работе проведены теоретические исследования напряженно-деформированного состояния пятислойных круговых пластин при изгибе и получены следующие новые научные результаты, включающие:

- механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования пятислойных круговых симметричных и несимметричных по толщине пластин, включающие уравнения равновесия и формулировки граничных условий, отличающиеся учетом наличия трех упругопластических несущих слоев и двух физически нелинейных заполнителей, что приводит к увеличению количества уравнений равновесия, позволяет формулировать и исследовать новый класс задач механики тонкостенных элементов конструкций, возникающих в инженерной практике [1-А]–[18-А];

- общие методы решений линейных и нелинейных краевых задач об осесимметричном изгибе пятислойных симметричных и несимметричных по толщине пластин, аналитические решения соответствующих задач, частные решения при равномерно распределенных и локальных (круговая, кольцевая, погонная) нагрузках в случае закрепленного и свободно опертого контуров; [1-А]–[9-А], [12-А]–[18-А];

- расчетные формулы для исследования параметров деформирования упругих пятислойных пластин, рекуррентные формулы, позволяющие алгоритмизировать процесс исследования НДС при изгибе физически нелинейных пластин при различных условиях закрепления контура [1-А]–[18-А];

¹ Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с, (с. 317, рис. 6.2, кр. (4))

- результаты численного параметрического анализа НДС упругих пяти-слойных круговых пластин, включающие графики зависимости перемещений и напряжений от вида нагрузки (равномерно распределенная, локальная), упругих свойств материала несущих слоев (дюралюминий, кордиерит, титан) и заполнителей (фторопласт-4, пенополиуретан, пенопласт), асимметрии пластины по толщине, вида граничных условий, в частном случае показавшие совпадение с известными результатами расчета трехслойных пластин других авторов [1-А]–[5-А], [7-А], [8-А], [12-А]–[17-А];

- численные результаты, подтвердившие сходимость метода упругих решений применительно к пятислойным конструкциям, проиллюстрировавшие увеличение упругих расчетных перемещений за счет физической нелинейности материалов слоев до 14,8 % и уменьшение напряжений в слоях порядка 12 % [6-А], [9-А], [18-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Разработанные механико-математические модели деформирования упругих и физически нелинейных пятислойных пластин и полученные аналитические решения позволяют проводить численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния инженерных конструкций при непрерывных и локальных нагрузках.

Новые аналитические решения представляют собой самостоятельную ценность в качестве фундаментальных результатов в области расчета тонкостенных конструкций. Они могут быть использованы для верификации новых численных решений при исследовании НДС инженерных сооружений, в курсах строительной механики высшей школы.

Результаты численного эксперимента позволяют давать практические рекомендации при проектировании слоистых систем, в том числе солнечных батарей, что может существенно снизить материальные затраты, необходимые для натурных экспериментов.

Отдельные результаты диссертации приняты к использованию в ОАО «Электроаппаратура» для расчета прочности и долговечности корпусных композиционных элементов конструкций. В Испытательном центре железнодорожного транспорта БелГУТа методики расчета пятислойных пластин использованы для расчета прочностных характеристик композитных элементов конструкций, в том числе, элементов перегородок пассажирских вагонов локомотивной тяги и моторвагонного подвижного состава.

Результаты внедрения подтверждены соответствующими документами, включенными в приложение диссертации (Приложение А).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в рецензируемых научных изданиях

1. Салицкий, В. С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации : междунар. сборн. научн. труд.* – Гомель, 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

2. Салицкий, В. С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Теоретическая и прикладная механика : Международный научно-технический сборник.* – Минск : БНТУ, 2023. – С. 234–239.

3. Салицкий, В. С. Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации : междунар. сборн. научн. труд.* – Гомель, 2024. – № 17. – С. 114–119.

4. Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

5. Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой пятислойной пластины, несимметричной по толщине / Э. И. Старовойтов, В. С. Салицкий // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2025. – № 3 (31). – С. 397–412.

6. Салицкий В. С. Уравнения равновесия упругопластической пятислойной симметричной по толщине пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2025. – № 4 (65). – С. 42–46.

7. Старовойтов, Э. И. Перемещения при изгибе в несимметричной круговой пятислойной пластине / Э. И. Старовойтов, В. С. Салицкий // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2025. – № 6 (153). – С. 108–115.

8. Салицкий, В.С. Деформирование круглой пятислойной пластины несимметричной по толщине / В.С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации : междунар. сборн. научн. труд.* – Гомель, 2025. – № 18. – С. 143–150.

9. Старовойтов, Э. И. Деформирование круговой пятислойной пластины с упругими и упругопластическими слоями / Э. И. Старовойтов, В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации : междунар. сборн. научн. труд.* – Гомель, 2025. – № 18. – С. 151–159.

Материалы конференций

10. Салицкий, В. С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021 года. Том 1.* – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "ТРИП", 2021. – С. 199–201.

11. Салицкий, В. С. Деформирование круговой пятислойной пластины, симметричной по толщине / В. С. Салицкий // *Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Международной научно-практической конференции, по-*

священной 160-летию Белорусской железной дороги. В 2-х частях, Гомель, 24–25 ноября 2022 года. – Гомель: БелГУТ, 2022. – С. 246–248.

12. Салицкий В. С. Изгиб круговой пятислойной пластины локальной нагрузкой / В. С. Салицкий // Механика, Сейсмостойкость, Машиностроение : Сборник докладов международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РУз Т. Р. Рашидова, Ташкент, 27–29 мая 2024 года. – Ташкент: Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева, 2024. – С. 421–425.

13. Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // III республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования : сборник материалов форума, Брест, 21–24 мая 2024 года. – Брест: БрГТУ, 2024. – С. 53–55.

14. Салицкий, В. С. Локальное нагружение круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Вычислительная механика для гранулированных и геоматериалов : материалы международного белорусско-китайского семинара по компьютерной механике для сыпучих и геоматериалов, Минск, 09–10 июля 2024 года. – Минск: БГУ, 2024. – С. 117–121.

15. Салицкий, В. С. Изгиб круговой пятислойной пластины локальной нагрузкой / В. С. Салицкий // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. В 2-х частях, Гомель, 21–22 ноября 2024 года. – Гомель: БелГУТ, 2024. – С. 198–199.

16. Salicki, V. Local Loading of Circular Five-layer Plate / V. Salicki // AIP Conf. Proc. 2025: International conference: Ensuring seismic safety and seismic stability of buildings and structures, applied problems of mechanics, Tashkent, 27–29 May 2024. – 2025. – Vol. 3265, iss. 1 – P.050006-1–5, doi.org/10.1063/5.0265375

17. Салицкий, В. С. Изгиб несимметричной круговой пятислойной пластины равномерно распределенной нагрузкой / В. С. Салицкий // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIV Международной научно-практической конференции, посвященной пятилетке качества. В 2-х частях, Гомель, 20–21 ноября 2025 года. – Гомель: БелГУТ, 2025. – С. 152–154.

18. Старовойтов, Э. И. Уравнения равновесия упругопластической круговой пятислойной пластины / Э. И. Старовойтов, В. С. Салицкий // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIV Международной научно-практической конференции, посвященной пятилетке качества. В 2-х частях, Гомель, 20–21 ноября 2025 года. – Гомель: БелГУТ, 2025. – С. 156–157.

РЕЗЮМЕ

Салицкий Владислав Сергеевич Деформирование пятислойной круговой пластины

Ключевые слова: круговая пятислойная пластина, неосесимметричность по толщине, упругость, пластичность, аналитические решения, численный анализ

Целью работы является разработка расчетных механико-математических моделей деформирования упругих и физически нелинейных пятислойных круговых пластин под действием непрерывных и локальных нагрузок при различных способах закрепления контура. Приведенные модели включают уравнения равновесия, полученные вариационными методами, граничные условия. Они отличаются учетом двух относительно толстых заполнителей и трех тонких несущих слоев.

Получены общие аналитические решения задач об изгибе упругих и физически нелинейных пластин (в итерационном виде) при осесимметричных нагрузках. Рассмотрены частные случаи нагружения непрерывными и локальными нагрузками. Решения содержат расчетные формулы параметров напряженно-деформированного состояния, учитывающие вид внешних нагрузок, физически нелинейные свойства материалов слоев, асимметрию пластины по толщине и материалам. Рассмотрены случаи жесткой заделки и шарнирного опирания контура пластины. Разработаны алгоритмы решения поставленных задач.

Приведены результаты численной апробации и параметрического анализа полученных аналитических решений, устанавливающие зависимость напряженно-деформированного состояния от величины внешней нагрузки, геометрических и механических параметров слоев, асимметрии пластины, характеристик физической нелинейности, граничных условий.

Результаты исследований являются новыми и вносят существенный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела, могут быть использованы заинтересованными проектными организациями в строительстве и машиностроении, в курсах строительной механики высшей школы.

РЭЗІЮМЭ

Саліцкі Уладзіслаў Сяргеевіч Дэфармаванне пяціслаёвай кругавой пласціны

Ключавыя словы: кругавая пяціслаёвая пласціна, неасесіметрычнасць па таўшчыні, пругкасць, пластычнасць, аналітычныя рашэнні, лікавы аналіз.

Мэтай працы з'яўляецца распрацоўка разліковых механіка-матэматычных мадэляў дэфармавання пругкіх і фізічна нелінейных пяціслаёвых кругавых пласцін пад дзеяннем бесперапынных і лакальных нагрузак пры розных спосабах замацавання контуру. Прыведзеныя мадэлі ўключаюць раўнанні раўнавагі, атрыманыя варыяцыйнымі метадамі, гранічныя ўмовы. Яны адрозніваюцца улікам двух адносна тоўстых запаўняльнікаў і трох тонкіх апорных пластоў.

Атрыманы агульныя аналітычныя рашэнні задач аб выгібе пругкіх і фізічна нелінейных пласцін (у ітэрацыйным выглядзе) пры восесіметрычных нагрузках. Разгледжаны прыватныя выпадкі нагружэння бесперапыннымі і лакальнымі нагрузкамі. Рашэнні ўтрымоўваюць разліковыя формулы параметраў напружана-дэфармаванага стану, якія ўлічваюць выгляд вонкавых нагрузак, фізічна нелінейныя ўласцівасці матэрыялаў пластоў, асіметрыю пласціны па таўшчыні і матэрыялам. Разгледжаны выпадкі жорсткай заладкі і шарнірнага абапірання контура пласціны. Распрацаваны алгарытмы рашэння пастаўленых задач.

Прыведзены вынікі колькаснай апрабачы і параметрычнага аналізу атрыманых аналітычных рашэнняў, якія ўстанаўліваюць залежнасць напружана-дэфармаванага стану ад велічыні знешняй нагрузкі, геаметрычных і механічных параметраў пластоў, асіметрыі пласціны, характарыстык фізічнай нелінейнасці, межавых умоў.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і ўносяць істотны ўклад у развіццё механікі дэфармуемага цвёрдага цела, могуць быць выкарыстаны зацікаўленымі практнымі арганізацыямі ў будаўніцтве і машынабудаванні, у курсах будаўнічай механікі вышэйшай школы.

SUMMARY

Salicki Vladislav Sergeevich

Deformation of a circular five-layer plate

Keywords: circular five-layer plate, non-axisymmetric thickness, elasticity, plasticity, analytical solutions, numerical analysis

The aim of this work is to develop computational mechanical and mathematical models for the deformation of elastic and physically nonlinear five-layer circular plates under continuous and localized loads with various contour fixation methods. The presented models include equilibrium equations obtained using variational methods and boundary conditions. They differ in that they take into account two relatively thick cores and three thin load-bearing layers.

General analytical solutions to problems of bending elastic and physically nonlinear plates (in iterative form) under axisymmetric loads are obtained. Particular cases of continuous and localized loading are considered. The solutions contain calculation formulas for the stress-strain state parameters, taking into account the type of external loads, the physically nonlinear properties of the layer materials, and the asymmetry of the plate in thickness and materials. Cases of rigid fixation and pinned support of the plate contour are considered. Algorithms for solving the assigned tasks have been developed.

The results of numerical testing and parametric analysis of the resulting analytical solutions are presented, establishing the dependence of the stress-strain state on the magnitude of the external load, the geometric and elastic parameters of the layers, the plate asymmetry, the characteristics of physical nonlinearity, and the boundary conditions.

These research results are new and make a significant contribution to the development of solid mechanics. They can be used by interested design organizations in construction and mechanical engineering, as well as in structural mechanics courses at higher education institutions.



Научное издание

САЛИЦКИЙ Владислав Сергеевич

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЯТИСЛОЙНОЙ
КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 19.05.2026 г. Формат бумаги 60×84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 1,4. Тираж 70 экз. Зак. 785.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653. Гомель