

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра технической физики и теоретической механики

МЕХАНИКА. ИССЛЕДОВАНИЯ И ИННОВАЦИИ

Международный сборник научных трудов

Выпуск 18

Под редакцией
доктора технических наук, профессора *А. О. ШИМАНОВСКОГО*

Гомель 2025

В сборнике публикуются материалы, которые представлены на Международном семинаре преподавателей вузов по теоретической механике, состоявшемся в Белорусском государственном университете транспорта.

Для преподавателей вузов, ученых, занимающихся исследованиями в области механики. Может быть полезен аспирантам, студентам технических вузов, инженерно-техническим работникам.

Сборник включен в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по направлениям: механика и машиностроение по технической отрасли и механика физико-математической отрасли науки.

Редакционная коллегия:

Шимановский А. О. (главный редактор), доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

Путьато А. В. (зам. главного редактора), доктор технических наук, профессор (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого);

Черноус Д. А. (отв. секретарь), кандидат технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

Богданович П. Н., доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

Боцко Й. С., PhD, профессор (Словакия, Кошице, Технический университет Кошице);

Галай Э. И., доктор технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

Гегедеш М. Г., кандидат технических наук, доцент (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого);

Довгяло В. А., доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

Леоненко Д. В., доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

Плескачевский Ю. М., доктор технических наук, член-корреспондент НАН Беларуси;

Старовойтов Э. И., доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

Халецки М., PhD, доцент (Польша, Варшава, SGGW);

Шабловский О. Н., доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого)

СОДЕРЖАНИЕ

Научные публикации

<i>Ахраменко Н. А.</i> Особенности нарастания давления в ресивере поршневого компрессора	5
<i>Будникова Д. А.</i> Колебания пятислойного стержня под действием мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки	13
<i>Ворожун А. В.</i> Современные подходы к созданию цифровых двойников железнодорожного подвижного состава	19
<i>Ворожун И. А., Ворожун А. В., Гегедеш М. Г.</i> Сравнение способов размещения длиномерного груза на сцепках платформ	28
<i>Гегедеш М. Г., Комаровский Н. В., Рахимов Р. В., Афанаськов П. М.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния боковой рамы тележки грузового вагона.....	34
<i>Гегедеш М. Г., Якимчик Т. С., Шило Р. В.</i> Повышение безопасности движения железнодорожного подвижного состава в кривых малого радиуса	39
<i>Демьянчук О. В.</i> Моделирование обтекания воздушным потоком сцепа вагонов-хопперов.....	45
<i>Zheltkovich A., Molosh V., Verameichyk A., Marmysh D., Lyu Y., Yang J., Ren Y., Mou N., Parchotz K.</i> Determination of thermal and shrinkage stresses in monolithic reinforced concrete slabs based on a sliding foundation using deep learning neural networks	52
<i>Иванов А. С., Рейфштейндер Д. П., Фалькова Е. В.</i> Анализ работы шарниров равных угловых скоростей	64
<i>Коднянко Е. В.</i> Анализ установившегося качения жесткого колеса с гиперупругим ободом	69
<i>Котов А. В., Кроль Д. Г.</i> Оценка возможности применения метода деформируемого многогранника к задаче оптимизационного кинематического синтеза плоского рычажного механизма	81
<i>Лачугина Е. А.</i> Колебания пятислойной круговой пластины при мгновенном приложении нагрузки	90
<i>Леоненко Д. В.</i> Резонансные колебания сэндвич-стержня с легким наполнителем .	97
<i>Маркавцов А. А.</i> Подходы к анализу динамики систем транспортировки жидких грузов в жестких и эластичных емкостях	104
<i>Мармыш Д. Е., Шелег А. С.</i> Гранично-элементное моделирование напряжений в телах с неоднородной геометрией	113

<i>Остриков О. М.</i> Влияние прилегающих микроразмерных зерен на напряженно-деформированное состояние зерна поликристалла с остаточным клиновидным двойником	121
<i>Отока А. Г., Холодиков О. В.</i> Обнаружение трещин в железнодорожных колесах с использованием конечно-элементного моделирования их намагничивания	127
<i>Салицкий В. С.</i> Деформирование несимметричной по толщине круглой пяти-слойной пластины	143
<i>Старовойтов Э. И., Салицкий В. С.</i> Деформирование круговой пятислойной пластины с упругими и упругопластическими слоями	151
<i>Старовойтов Э. И., Суслов К. В.</i> Напряженно-деформированное состояние при изгибе пятислойного стержня с двумя заполнителями	160
<i>Холодарь Б. Г.</i> Описание поведения упруго-пластических материалов с помощью уравнений Максвелла с нелинейной вязкостью	167
<i>Черноус Д. А., Шилько С. В., Бессчетнов Е. В.</i> Метод и результаты прочностного расчета композитной трубы для водоснабжения	178
<i>Шимановский А. О., Карацуба Ю. Д.</i> Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния резинокордной муфты локомотива	185

Учебно-методические публикации

<i>Асланов Э. А., Сафаров Г. Г.</i> Условия эквивалентности и основные теоремы динамики системы материальных точек	191
<i>Иванов А. С., Рейфшнейдер Д. П., Фалькова Е. В.</i> Анализ напряжений и собственных частот колебаний стержней с различной конфигурацией сечений	198
<i>Иванов А. С., Рейфшнейдер Д. П., Фалькова Е. В.</i> Неравномерность вращения ведомого вала шарнира Гука	201
<i>Комнатный Д. В.</i> Краткий анализ трактата по теоретической механике «Формония» Я. Германа	204

К юбилею ученого

<i>Тюрин С. А., Комиссаров В. В.</i> К 90-летию профессора Л. А. Сосновского	213
--	-----

НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ (SCIENTIFIC PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 18. Гомель, 2025

УДК 621.512

Н. А. АХРАМЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ОСОБЕННОСТИ НАРАСТАНИЯ ДАВЛЕНИЯ В РЕСИВЕРЕ ПОРШНЕВОГО КОМПРЕССОРА

Рассматриваются процессы, происходящие в поршневом компрессоре с ресивером. Исследуются закономерности нарастания давления в ресивере в случае постоянной температуры сжимаемого газа. Получено выражение, позволяющее провести оценку величины давления в ресивере в зависимости от числа циклов возвратно-поступательного движения поршня в компрессоре. Определено число циклов движения поршня, необходимое для достижения половины максимально возможного давления.

Ключевые слова: сжатие, поршневой компрессор, давление, ресивер.

Введение. Компрессоры – это энергетические машины для повышения давления и перемещения газов. На практике такие машины создают перепад давлений, благодаря которому механическая энергия используется для последующего совершения механической работы, преодоления сопротивлений в трубопроводах при транспортировке газов и решения иных задач.

Название «компрессор» происходит от латинского слова *compressio*, в переводе означающего «сжатие», под которым здесь понимают процесс уменьшения объема, занимаемого рассматриваемым количеством газа, связанный либо с увеличением давления, либо с уменьшением температуры. При этом функции компрессора реализуются не уменьшением удельного объема (сжатия), а в результате повышения давления. Вместо термина «повышение давления» в литературе для краткости часто используют слово «сжатие».

Изобретение поршневого воздушного насоса – прототипа современных компрессоров с одной ступенью сжатия – связано с именем физика Отто фон Герике (Германия, 1650 г.) [1]. Совершенствованию компрессоров в XVIII и XIX вв. способствовало развитие горнорудной промышленности и металлургии. Во второй половине XVIII в. в Англии Джон Вилкинсон запатентовал

двухцилиндровый поршневой компрессор, в то же время Джеймс Уатт изготовил воздуходушную машину с паровым приводом [2]. Поршневой компрессор как машина для сжатия и перемещения газа был впервые использован для подачи воздуха в металлургическую печь в 1765 г., его изобретателем и изготовителем был знаменитый творец паровой машины Иван Ползунов. Почти до конца XIX в. поршневые компрессоры были единственным типом воздуходушных машин, применяемых в промышленности [3].

В настоящее время компрессорное оборудование используется в химических производствах, при добыче и переработке нефти, при транспортировке природного газа по газопроводам, в холодильной технике, на транспорте [4]. В машиностроении, горнодобывающей и других отраслях промышленности компрессоры используются с целью механизации трудоемких процессов для сжатия воздуха, который приводит в движение всевозможные машины и инструменты. Во многих случаях компрессоры устанавливают в отдельных помещениях (компрессорные станции) и централизованно подают сжатый воздух в цеха. На ряде предприятий на выработку сжатого воздуха идет значительная часть всей расходуемой мощности.

Принцип работы. В компрессорном оборудовании происходит преобразование энергии, подводимой двигателем к валу машины, в энергию газов. Способ передачи энергии является основой для классификации компрессоров по принципу действия, в соответствии с которой такие машины подразделяют на объемные и динамические. В объемных компрессорах передача энергии от двигателя к газу происходит в рабочей камере, периодически изменяющей свой объем (из-за перемещения одной или нескольких стенок). В процессе изменения объема камера поочередно соединяется с полостью низкого и высокого давления газа. При этом двигателем производится работа по перемещению стенок камеры.

В противоположность объемным компрессорам, работающим с постоянной производительностью, динамические компрессоры (их также называют турбокомпрессорами) работают с постоянным давлением. Они бывают осевой и радиальной конструкций. Последние также называют центробежными. К динамическим также относят струйные компрессоры, представляющие собой эжекторы, в которых энергия активного газа увеличивает давление пассивной рабочей среды. Они востребованы на газовых месторождениях, химических производствах.

В промышленности наибольшее распространение получили поршневые компрессоры, к преимуществам которых относятся высокий коэффициент полезного действия при средних и малых производительностях, а также возможность достижения высоких давлений в одной установке.

Рассмотрим рабочий цикл поршневого компрессора с одной рабочей камерой, в котором изменение ее объема происходит вследствие возвратно-поступательного движения поршня. Схемы компрессора для крайних левого и правого положений поршня изображены на рисунке 1.

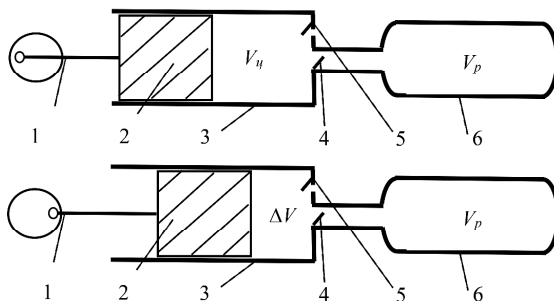


Рисунок 1 – Положение поршня в крайнем левом (а) и крайнем правом (б) положениях: 1 – кривошипно-шатунный механизм; 2 – поршень; 3 – цилиндр; 4 – нагнетательный клапан; 5 – всасывающий клапан; 6 – ресивер (воздухосборник)

Поршень 2 перемещается двигателем компрессора с помощью кривошипно-шатунного механизма 1. Наличие разности давлений ведет к перемещению воздуха через клапаны. Цикл работы компрессора включает два этапа.

При движении поршня влево нагнетательный клапан 4 закрыт, всасывающий клапан 5 открыт, и объем под поршнем увеличивается. Давление за всасывающим клапаном больше давления под поршнем и поэтому происходит всасывание воздуха в цилиндр 3. В крайнем левом положении объем воздуха становится равным $V_{ц}$.

При движении поршня вправо нагнетательный клапан 4 открыт, всасывающий клапан 5 закрыт, и объем под поршнем уменьшается. Давление за нагнетательным клапаном меньше давления под поршнем и поэтому воздух нагнетается из цилиндра в ресивер 6. В реальном компрессоре обязательно остается зазор между крышкой цилиндра и днищем поршня, поэтому при крайнем правом положении поршня всегда остается невытесненный объем ΔV , называемый вредным пространством. Относительный объем такого пространства обычно не превышает 0,05.

При повышении степени сжатия в компрессоре количество всасываемого газа (воздуха) уменьшается, т. е. происходит снижение производительности машины, и она в пределе может стать равной нулю. Степень повышения давления, при которой поршневой компрессор не всасывает свежую порцию газа (воздуха) (прекращает его подачу), называют объемным пределом сжатия. В этом случае газ, находящийся во вредном пространстве, расширяясь, занимает весь объем цилиндра, и всасывание становится невозможным [5].

Очевидно, что нарастание давления в ресивере зависит от числа циклов поршня. Чем их больше, тем больше давление в ресивере. При этом интерес представляет то, как именно происходит процесс нарастания давления.

Физические основы работы. Соотношениями, которые связывают между собой величины, определяющие состояние газа, являются давление p , под

которым находится газ, его температура T и объем V , занимаемый определенной массой газа. Их называют параметрами состояния. Перечисленные три величины не являются независимыми. Каждая из них – функция двух других. Уравнение, связывающее все три величины (давление, объем и температуру газа для данной его массы), называется уравнением состояния и в общем виде записывается как $p = f(V, T)$.

Это значит, что состояние газа определяется только двумя параметрами (например, давлением и объемом, давлением и температурой или, наконец, объемом и температурой), третий параметр однозначно определяется двумя другими. Если уравнение состояния известно в явном виде, то любой параметр можно вычислить, зная два других [6].

Большинство промышленных газов при давлениях и температурах, характерных для компрессоров низкого и среднего давления, с достаточной точностью подчиняются уравнению состояния Менделеева – Клапейрона [7, 8].

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (1)$$

где p – давление; V – объем; m – масса; M – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31$ Дж/(моль·К); T – термодинамическая температура.

Так как $m/M = \gamma$ (γ – количество вещества), то уравнение (1) можно также записать в виде

$$pV = \gamma RT. \quad (2)$$

Газы, которые подчиняются закону Менделеева – Клапейрона, называются идеальными, а само уравнение – уравнением состояния идеального газа. Для двух состояний газа (для данной массы одного и того же газа) можно записать

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Согласно ГОСТ 28567-90 [9] различают следующие виды КПД компрессора: изотермный, политропный и механический. Под изотермным КПД понимается отношение изотермной мощности компрессора к мощности на его валу. Далее будут рассматриваться процессы в компрессоре при постоянной температуре ($T = \text{const}$). В этом случае

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (3)$$

Давление в ресивере поршневого компрессора. Для изотермического процесса при первом сжатии согласно выражению (3) можно записать

$$p_0 (V_p + V_u) = p_1 (V_p + \Delta V), \quad (4)$$

где p_0 – атмосферное давление; V_p – объем ресивера; V_u – объем цилиндра; p_1 – давление после первого сжатия в ресивере и недовытесненном объеме ΔV .

Для давления после первого сжатия из выражения (4) получаем

$$p_1 = p_0 \frac{V_p + V_u}{V_p + \Delta V}. \quad (5)$$

Рассмотрим второе сжатие. В конце него давление в ресивере и объеме ΔV станет равным p_2 . Тогда согласно (2) можно записать

$$p_2(V_p + \Delta V) = \gamma RT, \quad (6)$$

где γ – количество вещества (количество молей воздуха) в объеме, равном $V_p + \Delta V$, после процесса сжатия. Это же количество воздуха было до начала сжатия в цилиндре и ресивере, т. е. $\gamma = \gamma_u + \gamma_p$.

Количество вещества в цилиндре и ресивере перед началом второго сжатия

$$\gamma_u = \frac{p_0 V_u}{RT}, \quad \gamma_p = \frac{p_1 V_p}{RT}. \quad (7)$$

Тогда, подставив $\gamma = \gamma_u + \gamma_p$ в выражение (6) с учетом (7), получим

$$p_2(V_p + \Delta V) = \left(\frac{p_0 V_u}{RT} + \frac{p_1 V_p}{RT} \right) RT. \quad (8)$$

Для нахождения давления после второго сжатия подставим давление p_1 из соотношения (5) в (8), в результате чего получим

$$p_2(V_p + \Delta V) = p_0 V_u + p_0 V_p \frac{V_p + V_u}{V_p + \Delta V}. \quad (9)$$

Из (9) находим давление в ресивере после второго сжатия

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_u}{V_p + \Delta V} + V_p \frac{V_p + V_u}{(V_p + \Delta V)^2} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим третье сжатие. В конце третьего сжатия давление в ресивере и объеме ΔV станет равным p_3 . Тогда можно записать

$$p_3(V_p + \Delta V) = \gamma RT, \quad (11)$$

где γ – количество вещества (количество молей воздуха) в объеме равном $V_p + \Delta V$ после третьего сжатия. Это же количество воздуха было до начала третьего сжатия в цилиндре и ресивере, т. е. $\gamma = \gamma_u + \gamma_p$.

Количество вещества в цилиндре до начала третьего сжатия

$$\gamma_u = \frac{p_0 V_u}{RT}. \quad (12)$$

Количество вещества в ресивере до начала третьего сжатия (после второго сжатия)

$$\gamma_p = \frac{p_2 V_p}{RT}. \quad (13)$$

Подставив в (11) $\gamma = \gamma_u + \gamma_p$ с учетом (12) и (13), получим

$$p_3 (V_p + \Delta V) = \left(\frac{p_0 V_u}{RT} + \frac{p_2 V_p}{RT} \right) RT. \quad (14)$$

Из соотношения (14) с учетом соотношения (10) находим давление в ресивере после третьего сжатия:

$$p_3 = p_0 \left(\frac{V_u}{V_p + \Delta V} + \frac{V_p V_u}{(V_p + \Delta V)^2} + V_p^2 \frac{V_p + V_u}{(V_p + \Delta V)^3} \right).$$

После четвертого сжатия аналогично соотношениям (8) и (14) можно записать

$$p_4 (V_p + \Delta V) = \left(\frac{p_0 V_u}{RT} + \frac{p_3 V_p}{RT} \right) RT, \quad (15)$$

где $p_3 V_p / RT$ – количество вещества в ресивере после третьего сжатия (до начала четвертого сжатия).

Далее из (15) получаем для давления p_4

$$p_4 = p_0 \left(\frac{V_u}{V_p + \Delta V} + \frac{V_p V_u}{(V_p + \Delta V)^2} + \frac{V_p^2 V_u}{(V_p + \Delta V)^3} + V_p^3 \frac{V_p + V_u}{(V_p + \Delta V)^4} \right). \quad (16)$$

После пятого сжатия аналогично соотношениям (8), (14) и (15) можно записать

$$p_5 (V_p + \Delta V) = \left(\frac{p_0 V_u}{RT} + \frac{p_4 V_p}{RT} \right) RT,$$

где $p_4 V_p / RT$ – количество вещества в ресивере после четвертого сжатия (до начала пятого сжатия).

С учетом соотношения (16) имеем

$$p_5 = p_0 \left(\frac{V_u}{V_p + \Delta V} + \frac{V_p V_u}{(V_p + \Delta V)^2} + \frac{V_p^2 V_u}{(V_p + \Delta V)^3} + \frac{V_p^3 V_u}{(V_p + \Delta V)^4} + V_p^4 \frac{V_p + V_u}{(V_p + \Delta V)^5} \right).$$

Аналогично рассматривая последующие циклы работы компрессора, получаем, что формула для давления после n -го сжатия имеет вид

$$p_n = p_0 \frac{V_u}{V_p + \Delta V} \left(1 + \frac{V_p}{(V_p + \Delta V)} + \frac{V_p^2}{(V_p + \Delta V)^2} + \dots + \frac{V_p^{n-1}}{(V_p + \Delta V)^{n-1}} \right) + p_0 \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n}.$$

Выражение в скобках в полученном выражении – это геометрическая прогрессия со знаменателем $V_p/(V_p+\Delta V)$. Сумма такой геометрической прогрессии [10, 11]

$$1 + \frac{V_p}{(V_p + \Delta V)} + \frac{V_p^2}{(V_p + \Delta V)^2} + \dots + \frac{V_p^{n-1}}{(V_p + \Delta V)^{n-1}} =$$

$$= \left(1 - \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n} \right) \left(1 - \frac{V_p}{(V_p + \Delta V)} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n} \right) \frac{V_p + \Delta V}{\Delta V}.$$

Следовательно, формула давления после n -го сжатия принимает вид

$$p_n = p_0 \frac{V_n}{\Delta V} \left(1 - \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n} \right) + p_0 \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n}. \quad (17)$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n} \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\Delta V}{V_p} \right)^n} \rightarrow 0.$$

Тогда максимально возможное значение давления в ресивере при $n \rightarrow \infty$

$$p_\infty = p_0 \frac{V_n}{\Delta V}.$$

Найдем число циклов возвратно поступательного движения поршня в компрессоре, необходимое для достижения половины максимально возможного давления. Для этого в формулу (17) вместо p_n подставим величину $p_0 V_n / (2\Delta V)$. После сокращения p_0 получим уравнение

$$\frac{V_n}{2\Delta V} = \frac{V_n}{\Delta V} \left(1 - \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n} \right) + \frac{V_p^n}{(V_p + \Delta V)^n}.$$

Его решение имеет вид

$$n = \frac{\ln \frac{2(V_n - \Delta V)}{V_n}}{\ln \frac{V_p + \Delta V}{V_p}}.$$

Например, при $\Delta V \sim 0,05 V_n$ и $\Delta V \sim 0,001 V_p$ получим $n \sim 642$.

Заключение. В результате рассмотрения процессов последовательных сжатий газа в компрессоре получено выражение, позволяющее провести оцен-

ку величины давления в ресивере в зависимости от числа циклов возвратно поступательного движения поршня в компрессоре при изотермическом процессе. Выполнена оценка числа циклов, необходимого для достижения половины максимально возможного давления. Полученные соотношения можно использовать для оценки энергоэффективности работы компрессора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Harsch, V.** Otto von Guericke (1602–1686) and his pioneering vacuum experiments / V. Harsch // *Aviation, Space, and Environmental Medicine*. – 2007. – Vol. 78, is. 11. – P. 1075–1077.
- 2 **Черкасский, В. М.** Насосы, вентиляторы, компрессоры / В. М. Черкасский – 2-е изд. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 415 с.
- 3 Поршневые компрессоры / Б. С. Фотин, И. Б. Пирумов, И. К. Прилуцкий, П. И. Пластинин. – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1987. – 371 с.
- 4 **Бусаров, С. С.** Моделирование рабочих процессов в тихоходных поршневых компрессорах компактных холодильных установок / С. С. Бусаров, А. В. Недовенчаный, А. А. Капелюховская // *Вестник Международной академии холода*. – 2023. – № 4. – С. 22–27.
- 5 **Овчинников, В. М.** Тепловые машины и теплообменные аппараты железнодорожного подвижного состава / В. М. Овчинников. – Гомель : БелГУТ, 2022. – 241 с.
- 6 **Кикоин, А. К.** Молекулярная физика / А. К. Кикоин, И. К. Кикоин. – М. : Наука, 1976. – 480 с. – (Общий курс физики).
- 7 **Шиляева, К. П.** Физика. Краткая теория и задачи / К. П. Шиляева, И. О. Деликатная, Н. А. Ахраменко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 211 с.
- 8 **Ахраменко, Н. А.** Молекулярная физика и термодинамика. Задачи для самостоятельной работы / Н. А. Ахраменко, И. И. Проневич, К. П. Шиляева. – Гомель : БелГУТ, 2019. – 61 с.
- 9 ГОСТ 28567-90. Компрессоры. Термины и определения. – Введ. 01.07.1991. – М. : Стандартинформ, 2005. – 19 с.
- 10 **Воднев, В. Т.** Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – 2-е изд. – Минск : Выш. шк., 1988. – 268 с.
- 11 **Бронштейн, И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – СПб. : Лань, 2010. – 608 с.

N. A. AKHRAMENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FEATURES OF PRESSURE INCREASE IN THE PISTON COMPRESSOR RECEIVER

The article investigates the processes occurring in a piston compressor with a receiver. The patterns of pressure increase in the receiver during processes occurring at a constant temperature are investigated. There is obtained the expression for estimating the receiver pressure depending on the number of piston reciprocating cycles in the compressor. The number of piston motion cycles required to reach half the maximum possible pressure is estimated.

Keywords: compression, piston compressor, pressure, receiver.

Получено 03.10.2025

УДК 534.131:62-419

*Д. А. БУДНИКОВА**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННО ПРИЛОЖЕННОЙ
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ**

Рассматривается задача о колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня, который включает три несущих слоя (центральный и два внешних) и два относительно толстых легких заполнителя. Получено аналитическое решение для случая мгновенного приложения равномерно распределенной нагрузки. Использован метод разложения искомым перемещений в ряд по построенной системе собственных ортонормированных функций. Приведены графики изменения прогиба и относительного сдвига по длине стержня для различных материалов слоев.

Ключевые слова: пятислойный симметричный стержень, равномерно распределенная нагрузка, колебания, прогиб, относительный сдвиг.

Введение. Разработке методов расчета слоистых конструкций при различных видах и типах нагрузок посвящено значительное число публикаций. В монографии [1] систематически исследуется деформирование трехслойных конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Особое внимание уделяется учету нелинейных и реономных свойств материалов слоев. Термомеханическому и радиационно-силовому нагружению трехслойных стержней и пластин посвящены монографии [2, 3]. Циклическая повреждаемость в процессе эксплуатации трехслойных конструкций, исследована в [4].

В статье [5] рассмотрено квазистатическое деформирование упругой круговой пятислойной пластины под действием локальной кольцевой нагрузки. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура исследованы в [6, 7].

Колебания сэндвич-стержня с легким заполнителем изучены в статье [8]. Анализ свободных колебаний пятислойных симметричных по толщине стержней представлен в работах [9–13]. Определены собственные частоты и формы колебаний, построены системы собственных ортонормированных функций. Исследование вынужденных колебаний пятислойных стержней, судя по публикациям, до настоящего времени не проводилось.

Представленная работа посвящена анализу динамического поведения пятислойного стержня при действии мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки.

Постановка задачи. Дифференциальные уравнения, описывающие изменение прогиба w и относительного сдвига ψ при вынужденных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня (рисунок 1), получаются из соответствующих уравнений свободных колебаний [9–13] добавлением распределенной нагрузки q_0 :

$$\begin{aligned}
 a_1 \Psi_{,xx} - a_2 w_{,xxxx} &= 0; \\
 a_2 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} &= -q_0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2c^2 \left(\frac{1}{3} K_2^+ c + K_3^+ h_2 \right); \quad a_2 = K_2^+ h_2 c (h_2 + 2h_1 + 2c) + \frac{1}{3} K_3^+ c^2 (3h + 2c); \\
 a_4 &= \frac{2}{3} \left[K_1^+ h_1^3 + K_2^+ h_2 (h_2^2 + 3(h_2 + h_1 + c)(h_1 + c) + K_3^+ c (c^2 + 3h_1 c + 3h_1^2)) \right]; \\
 K_k + \frac{4}{3} G_k &\equiv K_k^+;
 \end{aligned}$$

$2h_1$ – толщина центрального слоя; h_2 – толщина внешних слоев; c – толщина заполнителей, G_k, K_k – параметры упругости материалов слоев.

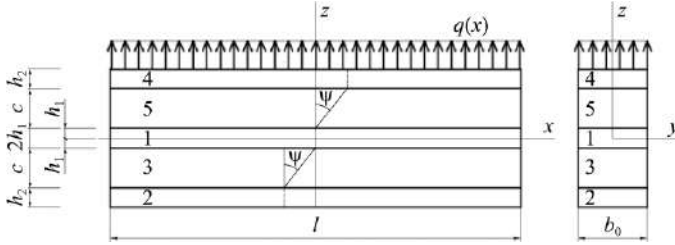


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойного стержня

Для замыкания начально-краевой задачи необходимо к уравнениям движения (1) добавить начальные и граничные условия.

В качестве начальных принимаем однородные условия

$$w(x, 0) = 0; \quad \dot{w}(x, 0) = 0. \tag{2}$$

При заделке торцов стержня $x = 0; l$ должны выполняться требования

$$\psi(0, t) = w(0, t) = w_{,x}(0, t) = 0; \quad \psi(l, t) = w(l, t) = w_{,x}(l, t) = 0. \tag{3}$$

В случае шарнирного опирания граничные условия следующие:

$$\psi(0, t) = w(0, t) = M(0, t) = 0; \quad \psi(l, t) = w(l, t) = M(l, t) = 0. \tag{4}$$

После преобразований из системы (1) выделено отдельное уравнение для прогиба, а через его производную выражен относительный сдвиг:

$$\begin{aligned}
 w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} &= -\frac{a_1}{a_2^2 - a_1 a_4} q; \\
 \psi &= \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_5 x + C_6.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Далее прогиб, относительный сдвиг и нагрузку раскладываем в ряды по системе собственных функций v_n , φ_n , полученных для граничных условий (3), (4) в [11]:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(x, t) = \frac{a_2}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad q(x, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (6)$$

где $T_n(t)$ – искомая функция времени.

$$\text{Здесь} \quad v_n = \frac{1}{d_n} (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)));$$

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - S_n (\operatorname{sh}(\beta_n x) + \sin(\beta_n x))); \quad S_n = \frac{\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)};$$

d_n – ортонормирующий множитель; β_n – собственные числа, которые связаны с частотами колебаний ω_n формулой $\beta_n^4 = a_1 M_0 \omega_n^2 / (a_4 a_1 - a_2^2)$.

Выражения для $q_n(t)$ получим, умножив третье из соотношений в (6) на v_n и выполняя интегрирование по длине стержня:

$$\int_0^l q(x, t) v_n dx = M_0 \int_0^l \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n dx = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^l v_m v_n dx.$$

В силу ортонормированности системы собственных функций

$$\int_0^l v_m v_n dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^l q(x, t) v_n dx. \quad (7)$$

Подстановка в уравнение (5) выражений для прогиба и нагрузки (6) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n v_{,xxxx} T_n(t) - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ddot{T}_n(t) = -\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t). \quad (8)$$

Учитывая уравнение собственных колебаний $v_{n,xxxx} = \beta_n^4 v_n$, получаем

$$-\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 v_n T_n(t) - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ddot{T}_n(t) = -\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t),$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n (\omega_n^2 T_n(t) + \ddot{T}_n(t) - q_n(t)) = 0.$$

Чтобы полученное уравнение выполнялось в любой момент времени, функция времени должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n.$$

Его общее решение [1] при однородных начальных условиях –

$$\ddot{T}_n + T_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Следует отметить, что наличие интегрального слагаемого в (9) не влияет на значения коэффициентов A_n, B_n , т. к. оно при $t = 0$ обращается в ноль.

Решение для случая равномерно распределенной нагрузки. Предположим, что нагрузка $q_0 = \text{const}$ распределена по всей длине стержня. Подстановка в формулу (7) дает параметры разложения в ряд по системе собственных функций:

$$q_n = -\frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} \int_0^l (\text{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\text{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))) dx.$$

Отсюда

$$q_n = \frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} (\text{ch}(\beta_n b) + \cos(\beta_n b) - S_n (\text{sh}(\beta_n b) - \sin(\beta_n b)) - 2). \quad (10)$$

Подставив коэффициенты (10) в (9), получим функцию времени при равномерно распределенной нагрузке:

$$T_n(t) = \frac{q_n}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t)).$$

Численные результаты. Собственные частоты колебаний ω_n и собственные числа β_n найдены ранее в [12] для случая заземленного стержня единичной длины, в котором $h_1 = h_2 = 0,01l$; $c = 0,1l$.

На рисунке 2 представлены графики изменения прогиба (a) и сдвига (b) по длине стержня, соответствующие равномерно распределенной нагрузке $q_0 = 1,5$ МПа для трех комбинаций материалов пакетов слоев. Графики, полученные при замене внешних несущих слоев на титановый сплав, визуально не отличаются от кривых для базового пакета. Использование в качестве заполнителей пенополиуретана увеличивает прогиб на 12 %, сдвиг – на 11 %.

Рисунок 3 иллюстрирует изменения прогиба (a) и сдвига (b) во времени при рассматриваемой нагрузке для базового пакета 1 и при использовании заполнителей из пенополиуретана 2. Применение более легкого заполнителя ведет к увеличению амплитуды колебаний до 10 % и росту частоты колебаний примерно в 2 раза.

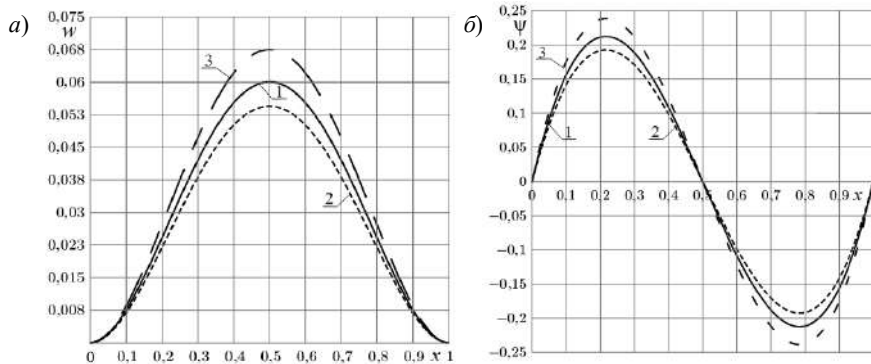


Рисунок 2 – Зависимость прогиба w (а) и сдвига ψ (б) вдоль оси стержня:
 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т;
 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан;
 3 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т

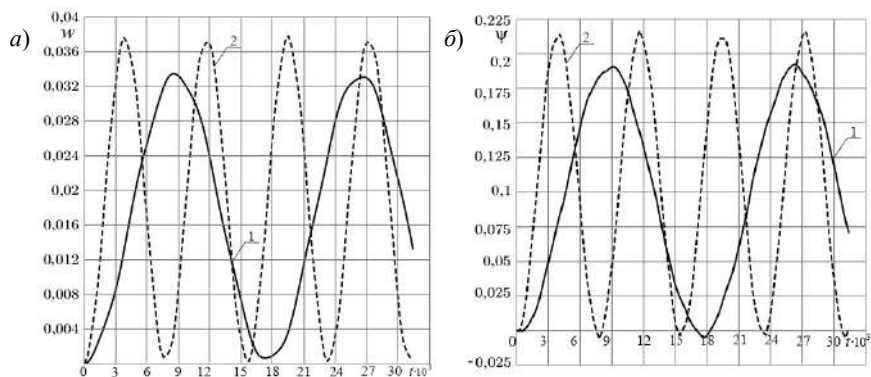


Рисунок 3 – Зависимость прогиба w (а) и сдвига ψ (б) от времени
 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т;
 2 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т

Выводы. Полученные в работе выражения позволяют численно исследовать перемещения и частоты колебаний пятислойного симметричного по толщине стержня при свободных и вынужденных колебаниях, что может быть использовано в расчетной практике предприятий машиностроительного и строительного комплексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. Starovoirov, M. Zhuravkov, D. Leonenko, Y. Lyu. – Singapore : Springer, 2024. – 386 p.

3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

5 **Салицкий, В. С.** Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 114–119.

6 **Лачугина, Е. А.** Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 92–99.

7 **Лачугина, Е. А.** Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

8 **Леоненко, Д. В.** Свободные колебания сэндвич-стержня с легким наполнителем / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 100–105.

9 **Будникова, Д. А.** Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

10 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.

11 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 25–39.

12 **Будникова, Д. А.** Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

13 **Будникова, Д. А.** Влияние условий закрепления пятислойного стержня на частоты собственных колебаний / Д. А. Будникова // Актуальные вопросы машиноведения. – 2025. – Т. 14. – С. 66–69.

D. A. BUDNIKOVA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

OSCILLATIONS OF A FIVE-LAYER ROD UNDER AN INSTANTLY APPLIED UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

This paper considers the vibrations of a five-layer rod symmetrical by thickness and consisting of three load-bearing layers (a central layer and two outer layers) and two relatively thick lightweight cores. An analytical solution is obtained for the case of instantaneous application of a uniformly distributed load. A method for expanding the sought-for displacements into a series of orthonormal eigenfunctions is used. Graphs of the change in deflection and relative shear along the rod length are presented for the different layer materials.

Keywords: five-layer symmetrical rod, uniformly distributed load, vibrations, deflection, relative shear.

Получено 13.10.2025

УДК 629.4:004.94

А. В. ВОРОЖУН

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К СОЗДАНИЮ ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Представлен обзор работ, связанных с практическим использованием цифровых двойников железнодорожных вагонов и локомотивов. Рассмотрены особенности цифровых моделей, теней и двойников. Приведены конкретные технические решения, которые применяются при анализе различных процессов, встречающихся при эксплуатации железнодорожного подвижного состава. Определены актуальные тенденции интеграции цифровых технологий в транспортную инфраструктуру.

Ключевые слова: железнодорожный транспорт, грузовой вагон, цифровой двойник, цифровая тень, моделирование.

Под цифровым двойником (Digital Twin) в настоящее время понимается обучаемая система, которая включает комплекс уточняемых в ходе натуральных экспериментов математических моделей объекта и позволяет предсказать его поведение на всём жизненном цикле [1]. На транспорте цифровой двойник рассматривается как компьютерный аналог физического устройства, моделирующий его реакцию на воздействия различных внешних факторов. Он может использоваться на всех этапах жизненного цикла транспортного средства: при разработке конструкции, производстве и эксплуатации.

В ходе эскизного проектирования для выбора оптимального технического решения создается ряд вариаций моделей разрабатываемого изделия с использованием программного обеспечения для системного и имитационного моделирования [2]. На этапе технического проектирования полученная ранее модель дорабатывается с использованием более точных моделей элементов, которые являются результатом многовариантных численных расчетов. Данная уточненная модель позволяет оптимизировать функционирование изделия, учитывая особенности режимов работы и воздействия окружающей среды. В процессе эксплуатации цифровой двойник обеспечивает обратную связь с процессами разработки и производства, диагностику и прогнозирование неисправностей и при необходимости дорабатывается с целью повышения эффективности функционирования, перекалибровки и выявления новых потребностей потребителей.

В статье [3] рассматриваются различные подходы к созданию цифровых двойников, их классификация. Отмечается, что внедрение таких технологий позволяет улучшить контроль за производственными процессами, снизить расходы на обслуживание и повысить качество продукции. Однако для их успешной реализации требуется наличие широких математических и ИТ-компетенций.

В работе [4] представлен обзор программных средств, предназначенных для создания цифровых двойников разных типов. Отмечается, что существующие программные решения основываются на четырех основных подходах: функционально-ориентированном, процессно-ориентированном, предметно-ориентированном и отраслевом (таблица 1) [5, 6].

Таблица 1 – Программные продукты для создания цифровых двойников изделий, объектов, систем

Подход	Программное обеспечение
Функционально-ориентированный	Autodesk Digital Twin Bosch IoT Suite AnyLogic ANSYS Twin Builder
Процессно-ориентированный	SAP Leonardo Internet of Things Oracle IoT Production Monitoring Cloud
Предметно-ориентированный	Cohesion, iTwins
Отраслевой	Cerebra Flutura Decision Science Tekvel Park

Целью представленной работы является анализ современных подходов к созданию и применению цифровых двойников железнодорожного подвижного состава, а также оценка их возможных областей применения.

На железнодорожном транспорте процессы, связанные с эксплуатацией подвижного состава, имеют нерегулярный и случайный характер. Это обусловлено не только широким диапазоном значений эксплуатационных воздействий, которым подвергается подвижной состав, но и тем, что он используется в условиях, окруженных разнообразными физическими объектами и инфраструктурой. Их свойства и параметры могут изменяться со временем под воздействием различных факторов, таких как износ, климатические условия или техническое состояние. Управление и прогнозирование работы подвижного состава требуют при моделировании процессов учета возникающей неопределенности.

Развитие интеллектуальных транспортных систем в контексте железнодорожного транспорта с особым акцентом на роль технологий цифровых двойников инфраструктуры и подвижного состава, а также проекты и разработки в разных регионах анализируются в работе [7]. В ЕС и Китае внедряются инновационные решения, направленные на интеграцию цифровых двойников в транспортную инфраструктуру. В ОАО «РЖД» (Россия) нашли применение системы автоматизированного управления строительством и эксплуатацией (АСУ ВМ), разрабатывается проект «Умный локомотив» и создается цифровой двойник сортировочной станции.

В работе [8] рассмотрены разработки цифровых двойников для компонентов инфраструктуры с целью повышения точности прогнозирования их эксплуатационного состояния. Описаны модели, предназначенные для диагностики усталостных повреждений рельсов с целью предотвращения аварий и организации предиктивного обслуживания. Также значительное внимание уделено системам мониторинга состояния мостов, основанным на искусственном интеллекте и методах конечных элементов, что позволяет точно прогнозировать деформации и выявлять ранние признаки разрушений.

Общий анализ показывает, что все регионы опираются на схожие технологические платформы и решения: BIM-платформы, сети IoT и 5G, системы искусственного интеллекта и машинного обучения, а также моделирование и симуляцию процессов. Единый технологический базис развития цифровых двойников в железнодорожной отрасли способствует повышению ее эффективности и инновационному развитию.

При анализе процессов, связанных с функционированием железнодорожного подвижного состава, используются цифровые модели, цифровые тени и цифровые двойники (рисунок 1) [9]. Цифровые модели широко применяются на первом этапе жизненного цикла изделия – при его проектировании. Они оперируют с системами, построенными на основе опыта эксплуатации аналогичных изделий. Цифровая тень отражает поведение реального объекта в условиях эксплуатации, используя избыточный объем собранных на этом объекте данных о функционировании различных элементов конструкций.

Цифровой двойник – это постоянно обновляемая виртуальная модель, которая учитывает основные изменения состояния объекта в процессе эксплуатации и позволяет, учитывая их, с высокой степенью точности моделировать работу сложных систем на протяжении всего срока службы.



Рисунок 1 – Функции цифровой модели, цифровой тени и цифрового двойника

Для компьютерного двойника важно учитывать не только подвижной железнодорожный состав в целом, но и отдельные конструктивные элементы поезда и инфраструктуры: рельсы, колёса, тормозные механизмы, узлы крепления, автосцепные устройства, транспортируемые грузы и т. д. Такая детализация позволяет более точно моделировать взаимодействия внутри системы, выявлять потенциальные слабые места и прогнозировать поведение каждого компонента при сложных сценариях, например, при сходе с рельсов или повреждениях, что в конечном итоге способствует более надежной оценке рисков и разработке эффективных мер защиты от них.

Цифровые двойники подвижного состава включают системы накопления информации, которая возвращается в систему цифрового проектирования, где сравниваются реальная и плановая ситуации. Чтобы обеспечить эффективное функционирование цифровых двойников, требуется иметь цифровые паспорта или формуляры изделий, которые наполняются качественными данными. На основе их анализа можно повысить эффективность оценки состояния технического оборудования и предсказать возможные поломки.

Рассмотрим некоторые варианты практического использования концепции цифровых двойников на железнодорожном подвижном составе.

В работе [10] выполнен расчет прочности съемного модуля Flat Rack с вязкоупругими фитингами, предназначенного для транспортировки негабаритных грузов (рисунок 2) с помощью метода конечных элементов. Модуль, состоящий из компонентов из прямоугольных труб, был протестирован на динамическую нагрузку, имитирующую маневровый удар. Результаты компьютерного моделирования подтвердили обеспечение необходимой прочности конструкции и безопасность транспортировки грузов при эксплуатационных нагрузках.

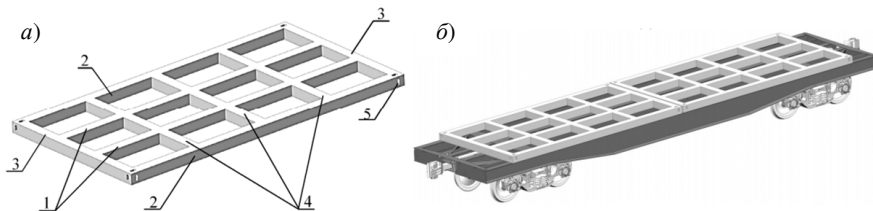


Рисунок 2 – Съемный модуль Flat Rack [10]:

а – конструктивные элементы съемного модуля; *б* – съемные модули на платформе

Концепция разработки цифровых двойников цистерн с грузом представлена в статье [11]. Рассматриваются этапы их создания, описываются функции, связанные со сбором и обработкой данных с помощью датчиков, видеокамер и тепловизоров (рисунок 3). Приведены примеры внедрения цифровых двойников и обсуждены перспективы их использования для повышения надежности, автономности и безопасности грузовых операций с цистернами.

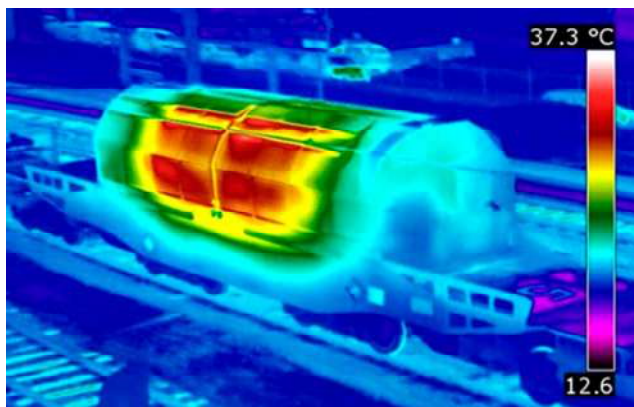


Рисунок 3 – Работа тепловизора по проверке состояния наливного груза в цистерне [11]

Технология цифрового двойника может быть использована также при моделировании работы электрического оборудования локомотивов для прогнозирования параметров его функционирования и сценариев развития ситуаций (включая аварийные). В этом случае используются данные измерительных систем, снимаемые непосредственно в пути следования, а также в реальном времени осуществляется поиск допустимых состояний на основе моделирования в рамках прескриптивной аналитики [12]. Решение поставленных задач осуществляется на основе комплексного применения методов имитационного компьютерного моделирования, математической статистики и теории электрической тяги. Такой подход открывает новые перспективы для повышения надежности и безопасности электровозов, а также для более эффективного управления их работой в различных условиях эксплуатации.

В работе [13] авторами представлена модель, позволяющая оценивать риск схода вагонов в реальном масштабе времени. Она использует моделирование, основанное на масштабных численных расчетах динамики многозвенных систем, и использует современные алгоритмы машинного анализа для прогнозирования вероятности схода. В качестве примера было выполнено моделирование тяжелого вагона для перевозки железной руды с трехсекционными тележками (рисунок 4). Симулятор поезда использовал для анализа величины скорости, боковых сил сцепления и радиусов кривизны путей – ключевые факторы, определяющие риск схода в реальных условиях эксплуатации. Результаты показали, что предложенная модель способна эффективно предсказывать индекс риска схода с рельсов как для порожнего, так и для загруженного состояния вагона, что подтверждает ее потенциал для использования в системах реального времени. Предложенный метод обеспечивает высокую точность и быстрый отклик, что критично для систем автоматического управления и предупреждения аварийных ситуаций.

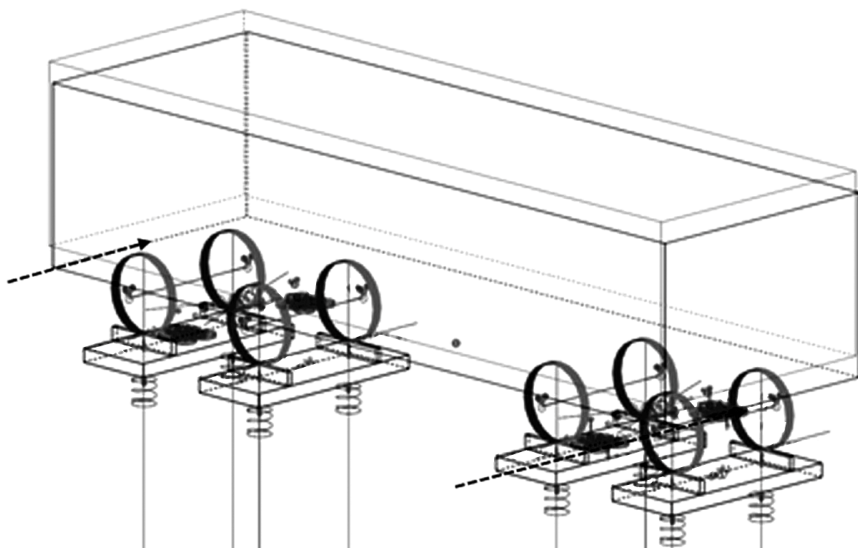


Рисунок 4 – Трехмерная модель для оценки риска схода вагонов [13]

Статья [14] посвящена созданию цифрового двойника – виртуальной модели, предназначенной для симуляции динамики схода поезда с рельсов (рисунок 5). Основная цель работы – создание упрощенной, но высокоточной одномерной модели, учитывающей физику процесса и позволяющей оценить вероятность возникновения потенциальных опасных ситуаций и тяжесть последствий схода.

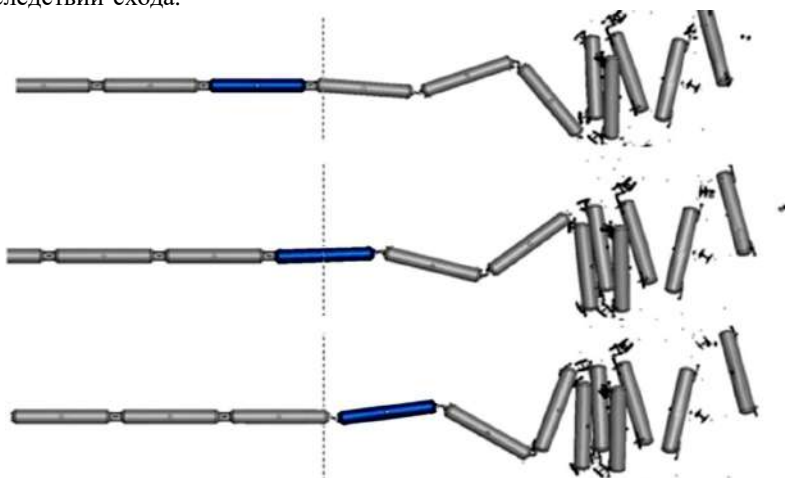


Рисунок 5 – Положения вагонов поезда в процессе схода с рельсов [14]

Предложенная авторами работы [14] модель представляет собой компьютерный двойник, который позволяет в реальном времени или при различных сценариях моделировать поведение поезда, учитывая такие параметры, как длина и масса вагонов, сопротивление пути, уклон, тормозные силы и влияние внешних факторов, вызывающих сход. Ее практическое применение дает возможность создания системы мониторинга и реагирования, которая в дальнейшем может стать составным элементом системы управления движением поездов, позволяющих обеспечить повышение безопасности движения.

Еще одно направление создания компьютерных двойников связано с оценкой безопасности высокоскоростных грузовых поездов [15]. В этом случае при моделировании динамики многосвязных систем следует принимать во внимание аэродинамические нагрузки, определяемые средствами вычислительной гидродинамики (CFD) (рисунок 6). Проведенные исследования показали, что риск опрокидывания при боковом ветре в значительной мере зависит от расположения и характеристик груза внутри вагона, а компьютерное моделирование позволяет точно предсказывать соответствующие эффекты. Использование цифровых моделей и CFD-симуляции значительно сокращает необходимость физических испытаний, повышая точность прогнозов и способствуя разработке более надежных систем грузоперевозки с учетом реальных аэродинамических факторов.

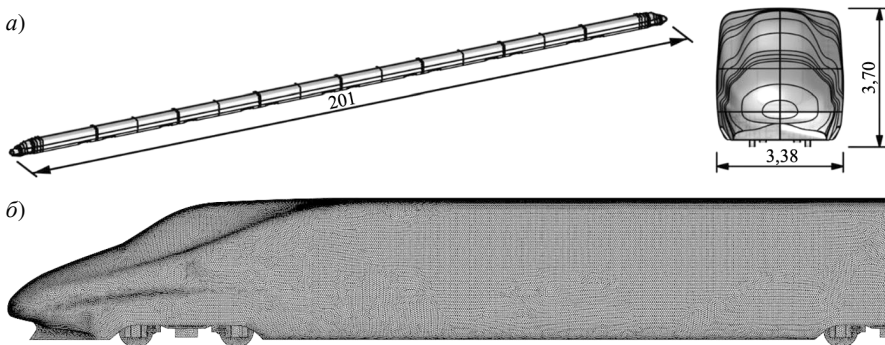


Рисунок 6 – Модель цифрового двойника грузового поезда [15]:
а – общий вид поезда; *б* – сетка конечных элементов на головном вагоне

Выполненный анализ показывает, что при проектировании тягового подвижного состава с помощью цифровых двойников будут решены следующие задачи [9]:

- оперативное осуществление тестовых запусков процесса или производственной цепочки, не требующее существенных затрат;
- обнаружение проблем или уязвимостей до запуска производства и поступления объекта в эксплуатацию;

- повышение прибыльности и конкурентоспособности бизнеса;
- долгосрочное планирование развития продукта и компании;
- повышение лояльности клиентов вследствие повышения точности прогнозирования спроса и потребительских качеств продукта.

Внедрение технологии цифровых двойников в жизненный цикл грузового вагона позволит повысить экономическую эффективность в течение всего срока эксплуатации. По оценкам экспертов, она может в некоторых случаях увеличиться в 10 раз и более вследствие того, что уже на этапе проектирования удастся учесть существующие особенности технологии производства, а также опыт использования аналогов на сети железных дорог. На этапе эксплуатации постоянный обмен данными между цифровой моделью и реальным грузовым вагоном позволит осуществить развернутый контроль за откликами на внешние воздействия, что приведет к снижению числа текущих ремонтов.

Таким образом, исходя из анализа рассмотренных работ следует, что в области использования цифровых двойников на железнодорожном транспорте наблюдается активное развитие технологий и открываются широкие возможности их применения для повышения безопасности, эффективности и надежности эксплуатации. В то же время на данный момент отсутствует единый подход к созданию комплексных моделей, позволяющих в режиме реального времени анализировать все процессы и параметры объектов в системе. Поэтому имеется необходимость дальнейших исследований с целью разработки методов, позволяющих интегрировать цифровые двойники в алгоритмы управления и эксплуатации железнодорожного транспорта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Лобков, К. Ю.** Применение методологии цифровых двойников в разработке инновационных проектов на высокотехнологичных производственных предприятиях / К. Ю. Лобков // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2021. – Т. 3. – С. 122–124.

2 **Кокорев, Д. С.** Цифровые двойники: понятие, типы и преимущества для бизнеса / Д. С. Кокорев, А. А. Юрин // Colloquium Journal. – 2019. – № 10–2 (34). – С. 101–104.

3 **Царев, М. В.** Цифровые двойники в промышленности: история развития, классификация, технологии, сценарии использования / М. В. Царев, Ю. С. Андреев // Известия вузов. Приборостроение. – 2021. – Т. 64, № 7. – С. 517–531.

4 **Миронов, Д. А.** Обзор программных продуктов разработки цифровых двойников / Д. А. Миронов, А. К. Ламм, Р. К. Расулов // Вестник Национального института бизнеса. – 2022. – № 4 (48). – С. 12–25.

5 **Щекочихин, О. В.** Современные тенденции управления киберфизическими системами на основе цифровых двойников / О. В. Щекочихин // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технологического регулирования. – 2021. – № 5 (63). – С. 33–37.

6 Digital Twin-Driven Product Design Framework / F. Tao, F. Sui, A. Liu [et al.] // International Journal of Production Research. – 2019. – Vol. 57, is. 12. – P. 3935–3953.

7 **Зуев, Д. В.** Развитие интеллектуальных транспортных систем: цифровые двойники в железнодорожной отрасли / Д. В. Зуев // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2025. – № 4 (44). – С. 33–46.

8 **Kushwaha, D.** Advancements and applications of digital twin in the railway industry: a literature review / D. Kushwaha, A. Kumar, S. P. Harsha // International Journal of Rail Transportation. – 2025. – Vol. 13, is. 5. – P. 865–890.

9 **Тишуков, С. В.** Применение цифровых двойников при проектировании тягового подвижного состава / С. В. Тишуков, Д. А. Чемоданов // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д. В 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2022. – С. 69–70.

10 The Analysis of the Loading and the Strength of the FLAT RACK Removable Module with Viscoelastic Bonds in the Fittings / S. Panchenko, J. Gerlici, G. Vatulia [et al.] // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13, is. 1. – P. 1–14.

11 Внедрение цифровых двойников как одно из ключевых направлений цифровизации производства / Н. В. Курганова, М. А. Филин, Д. С. Черняев [и др.] // International Journal of Open Information Technologies. – 2019. – Vol. 7, is. 5. – P. 105–115.

12 **Будаев, А. А.** Моделирование электрической части грузового электровоза на основе технологии «Цифровой двойник» / А. А. Будаев, Е. А. Третьяков // Известия Петербургского университета путей сообщения. – СПб.: ПГУПС. – 2025. – Т. 22, вып. 1. – С. 92–101.

13 Augmented digital twin for railway systems / E. Bernal, Q. Wu, M. Spiryagin, C. Cole // Vehicle System Dynamics. – 2024. – Vol. 62, is. 1. – P. 67–83.

14 Freight train derailment severity prediction: a physics-informed one-dimensional model / D. Kang, S. W. Kirkpatrick, Z. Zhang [et al.] // Smart and Resilient Transportation. – 2024. – Vol. 6, is. 1. – P. 72–92.

15 Correlation between cargo properties and train overturning safety for a high-speed freight train under strong winds / D. Zhang, Z. Guo, Y. Ni [et al.] // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2023. – Vol. 17, is. 1. – P. 1–16.

A. U. VARAZHUN

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

MODERN APPROACHES TO CREATING DIGITAL TWINS OF RAILROAD ROLLING STOCK

The paper presents a review of investigations related to the practical use of digital twins of railcars and locomotives. The characteristics of digital models, shadows, and twins are discussed. Specific technical solutions applied in the analysis of various processes encountered during the operation of railcars are presented. Current trends in the integration of digital technologies into transport infrastructure are identified.

Keywords: rail transport, freight car, digital twin, digital shadow, modeling.

Получено 15.10.2025

УДК 629.4.015:004.942

И. А. ВОРОЖУН¹, А. В. ВОРОЖУН¹, М. Г. ГЕГЕДЕШ^{1,2}

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

²Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ РАЗМЕЩЕНИЯ ДЛИННОМЕРНОГО ГРУЗА НА СЦЕПАХ ПЛАТФОРМ

Рассмотрены варианты размещения и крепления длинномерного груза на сцепах из двух или трех железнодорожных платформ. В результате математического моделирования определены силы в элементах продольного крепления груза к платформам, а также в междувагонных связях при соударении вагонов. Показано, что значения сил в элементах крепления и междувагонных связях при использовании двух и трех платформ различаются незначительно.

Ключевые слова: длинномерный груз, сцеп платформ, соударение вагонов, продольные силы.

Ассортимент производимых на предприятиях различных отраслей промышленности изделий постоянно расширяется. В частности, всё чаще находят применение длинномерные изделия, такие как металлопрокат, железобетонные конструкции (рисунок 1) и другие крупногабаритные грузы, которые требуют особых условий транспортировки.



Рисунок 1 – Размещение длинномерных грузов на вагонах и их сцепах

Согласно существующим нормативным документам груз, транспортируемый железнодорожным транспортом, считается длинномерным, если его длина превышает стандартную длину вагона более чем на 0,4 м с каждой его торцевой стороны [1]. Техническое оснащение подвижного состава и организация перевозочного процесса должны быть адаптированы для учета особенностей длинномерных грузов, чтобы обеспечить их безопасную доставку в точки назначения. Поэтому разработке специальных вагонов, механизмов

крепления, а также правилам транспортировки, обеспечивающим сохранность груза и безопасность движения, уделяется усиленное внимание [2–5].

Наиболее неблагоприятные воздействия платформа, груз и элементы его крепления испытывают при соударениях вагонов во время проведения маневровых работ, особенно при роспуске с сортировочных горок [6]. Относительно невысокая жесткость средств крепления ведет к необходимости учета возможности смещения груза при соударениях вагонов, которое может повлиять на безопасность движения. Поэтому необходим анализ взаимодействий в системе «поезд – транспортируемый груз» [7], для выполнения которого может быть использован подход, представленный ранее в работах [8, 9].

Целью представленной работы является сравнение вариантов размещения и крепления длинномерного груза на сцепе двух и трех железнодорожных платформ.

Математическая модель системы. Загруженные длинномерным грузом платформы представляют собой механическую систему со многими степенями свободы. Для облегчения проведения расчетов целесообразно заменить ее расчетной схемой с ограниченным числом степеней свободы.

При рассмотрении процесса соударения сцепы платформ, нагруженных длинномерным грузом с группой из n неподвижных вагонов (далее называемых «стенкой»), используются допущения, которые введены ранее в работе [10]:

- вагоны, платформы с тележками и длинномерный груз представляют собой абсолютно твердые тела, вертикальными, а также угловыми перемещениями которых пренебрегаем; массы тел сосредоточены в центрах масс;
- длинномерный груз размещен на платформах симметрично относительно их продольной и поперечной плоскостей симметрии;
- упругие элементы устройства крепления груза имеют линейные характеристики;
- зазоры в междувагонных связях отсутствуют, откат платформ после соударения ограничивается данными связями.

Движение рассматриваем на прямом горизонтальном участке пути, а начало отсчета координат $x_{г}$, $x_{пj}$, x_{vi} (индекс «г» здесь и далее соответствует грузу, «пj» – j-й платформе, «vi» – i-му вагону стенки), определяющих положение элементов системы располагаем в местах, соответствующих моменту соприкосновения первой платформы сцепы с вагонами стенки. Тогда расчетные схемы для рассматриваемых случаев размещения длинномерного груза приобретают вид, представленный на рисунках 2 и 3. На схемах помимо координат обозначены массы m тел системы, а также направления сил трения $F_{тр}$, сил в элементах крепления длинномерного груза к платформам $F_{пр}$ и сил в междувагонных связях $R_{п}$ и $R_{в}$.

С применением способа Даламбера составлены системы дифференциальных уравнений, описывающие движение груза, платформ и n вагонов стенки. Для случая крепления груза к одной платформе при двух платформах прикрытия по концам (см. рисунок 2) имеем

$$\left. \begin{aligned}
 m_{\Gamma} \ddot{x}_{\Gamma} + F_{\text{np}} + F_{\text{tp}} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\Gamma} - \dot{x}_{\text{п}2}) &= 0; \\
 m_{\text{п}1} \ddot{x}_{\text{п}1} + R_{\text{п}1} &= 0; \\
 m_{\text{п}2} \ddot{x}_{\text{п}2} - F_{\text{np}} - F_{\text{tp}} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\Gamma} - \dot{x}_{\text{п}2}) - R_{\text{п}1} + R_{\text{п}2} &= 0; \\
 m_{\text{п}3} \ddot{x}_{\text{п}3} - R_{\text{п}2} + R_{\text{п}3} &= 0; \\
 m_{\text{в}1} \ddot{x}_{\text{в}1} - R_{\text{п}3} + R_{\text{в}1} &= 0; \\
 \dots & \\
 m_{\text{в}i} \ddot{x}_{\text{в}i} - R_{\text{в}i} + R_{\text{в}i+1} &= 0; \\
 \dots & \\
 m_{\text{в}n} \ddot{x}_{\text{в}n} - R_{\text{в}n} + R_{\text{в}n+1} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

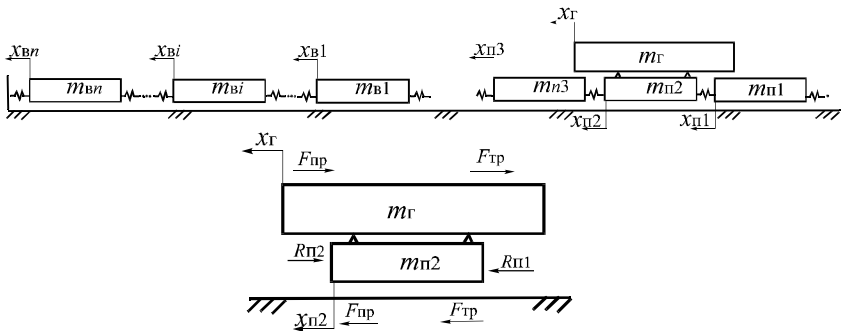


Рисунок 2 – Расчетная схема соударения загруженного длиномерным грузом сцепа из трех платформ (груз крепится к одной платформе при двух платформах прикрытия по концам) с группой неподвижных вагонов

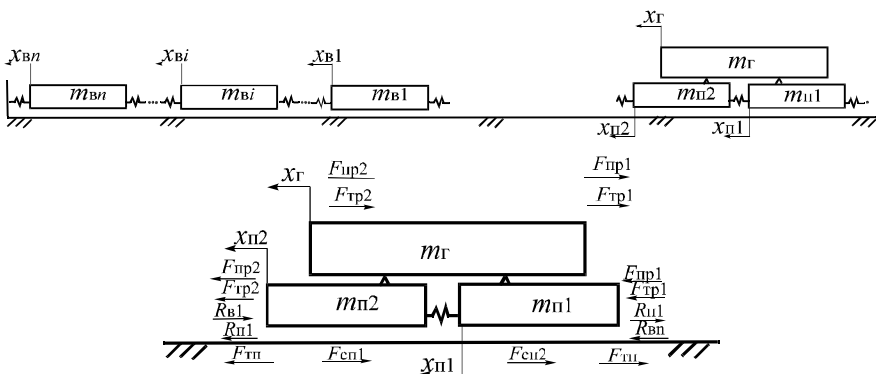


Рисунок 3 – Расчетная схема соударения загруженного длиномерным грузом сцепа из двух платформ с группой неподвижных вагонов

В случае размещения груза на сцепе из двух платформ (см. рисунок 3)

$$\left. \begin{aligned} m_r \ddot{x}_r + F_{np1} + F_{np2} + F_{tp1} (\operatorname{sgn}(\dot{x}_r - \dot{x}_{n1}) + F_{tp2} \operatorname{sgn}(\dot{x}_r - \dot{x}_{n2})) &= 0; \\ m_{n1} \ddot{x}_{n1} - F_{np1} - F_{tp1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_r - \dot{x}_{n1}) + R_{n1} &= 0; \\ m_{n2} \ddot{x}_{n2} - F_{np2} - F_{tp2} \operatorname{sgn}(\dot{x}_r - \dot{x}_{n2}) - R_{n1} + R_{n2} &= 0; \\ m_{b1} \ddot{x}_{b1} - R_{n2} + R_{b1} &= 0; \\ \dots & \\ m_{bi} \ddot{x}_{bi} - R_{bi+1} + R_{bi+2} &= 0; \\ \dots & \\ m_{bn} \ddot{x}_{bn} - R_{bn+1} + R_{bn+2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В системах уравнений (1) и (2) точки над координатами соответствуют производным от них по времени.

Силы в упругих элементах крепления длинномерного груза к платформам определяются выражениями:

– для сцепы из трех платформ –

$$F_{np} = c_{np} (x_r - x_{n2});$$

– для сцепы из двух платформ –

$$F_{np1} = c_{np} (x_r - x_{n1}); \quad F_{np2} = c_{np} (x_r - x_{n2}),$$

где c_{np} – коэффициенты жесткости канатов продольного крепления груза к платформе.

Значения сил трения находятся по формулам вида

$$F_{tp} = f m_r g,$$

где f – коэффициент трения между поверхностями длинномерного груза и опорами платформ; m_r – суммарная масса груза, приходящаяся на опору; g – ускорение свободного падения;

Силы в междувагонных связях получаются из выражений

$$R_{bi} = c(x_{bi} - x_{bi+1}) [1 + \varphi \operatorname{sgn}((x_{bi} - x_{bi+1})(\dot{x}_{bi} - \dot{x}_{bi+1}))], \quad (3)$$

где c – коэффициент жесткости упругих элементов междувагонных связей; φ – коэффициент трения между элементами междувагонных связей.

Значения R_{ni} определяются по формуле (3), учитывая, что $x_{nj} = x_{bi}$.

При выполнении численных расчетов в качестве начальных условий соударения принято, что при $t = 0$ все рассматриваемые координаты равны нулю, а начальные скорости $\dot{x}_{r(0)} = \dot{x}_{n1(0)} = \dot{x}_{nj(0)} = \dot{x}_{nk(0)} = v_0$; $\dot{x}_{bi(0)} = 0$, где v_0 – начальная скорость соударения, соответствующая скорости движения платформ с грузом в момент соприкосновения с первым вагоном стенки.

Результаты вычислений. Расчеты проводились для скорости соударения вагонов 5 км/ч при следующих исходных данных: $m_{n1} = m_{n2} = m_{n3} = 22000$ кг; $m_r = 53000$ кг; $m_{b1} = m_{b2} = m_{b3} = 84000$ кг; $c_{np} = c = 2 \cdot 10^6$ Н/м; $f = 0,1$; $\varphi = 0,55$.

Размещение длинномерного груза на одной платформе с двумя порожними платформами прикрытия по концам (см. рисунок 2) не всегда экономически целесообразно, поэтому проведены расчеты сил в элементах крепления и междувагонных связях с варьированием масс ($m_{п1}$, $m_{п3}$), соответствующим загрузке платформ прикрытия сопутствующими грузами. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Динамические показатели при соударении сцепы из трех платформ

Масса платформ, кг		Наибольшая величина силы, кН			
$m_{п1}$	$m_{п3}$	$F_{пр}$	$R_{п1}$	$R_{п2}$	$R_{п3}$
22000	22000	265,0	315,7	455,3	516,5
22000	50000	248,8	274,6	390,0	682,9
50000	22000	229,0	470,2	477,5	519,0
50000	50000	218,9	414,6	445,6	682,9
22000	75000	235,2	246,2	350,5	765,6
75000	75000	191,8	420,0	513,2	765,6
75000	22000	206,5	534,2	534,0	521,8

Анализ результатов расчетов (см. таблицу 1) позволяет сделать заключение, что загрузка платформ прикрытия другими сопутствующими грузами приводит к уменьшению силы $F_{пр}$ в упругих элементах продольного крепления длинномерного груза к средней платформе сцепы. Однако увеличение загрузки платформ прикрытия приводит к росту сил в междувагонных связях, причем в набегавшей на стенку вагонов платформе сцепы сила $R_{п3}$ возрастает примерно в 1,5 раза.

При размещении длинномерного груза с опорой на две платформы (см. рисунок 2) рассмотрены способы упругого продольного крепления груза к одной или двум платформам сцепы. Результаты расчетов (таблица 2) свидетельствуют о том, что при продольном креплении длинномерного груза к обеим платформам сцепы силы $F_{пр1}$ и $F_{пр2}$ в упругих элементах этих креплений меньше, чем в случае крепления к одной из платформ сцепы. Следует отметить, что способ продольного крепления длинномерного груза к одной или двум платформам сцепы практически не влияет на силы $R_{п1}$, $R_{п2}$ в междувагонных связях.

Таблица 2 – Силы, возникающие при соударении сцепы из двух платформ

Сила	Наибольшая величина силы, кН, при креплении		
	к двум платформам	платформе 2	платформе 1
$F_{пр1}$	168,7	0	291,1
$F_{пр2}$	222,8	279,8	0
$R_{п1}$	385,8	383,2	392,8
$R_{п2}$	531,6	531,6	527,8

Выводы. Выполненный анализ показывает предпочтительность способа размещения длинномерного груза на сцепе из двух железнодорожных платформ. Целесообразность применения крепления с использованием трех платформ, при котором платформы прикрытия загружены сопутствующим грузом, требует экономического обоснования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Технические условия размещения и крепления грузов: Приложение 3 к Соглашению о международном железнодорожном грузовом сообщении (СМГС). По состоянию на 1 июля 2020 года. Т. 1. – ОСЖД, 2020. – 447 с.

2 **Шатунов, О. В.** Динаміка зчепу вагонів-платформ під час перевезення довгомірного вантажу / О. В. Шатунов, А. О. Швець // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2020. – № 4 (88). – С. 114–131.

3 **Ворожун, И. А.** Оценка динамических сил в элементах крепления труб на железнодорожной платформе / И. А. Ворожун // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2008. – № 1. – С. 60–64.

4 **Ворожун, И. А.** Моделирование взаимодействия ярусов груза и платформы при торможении поезда / И. А. Ворожун, А. В. Шилович // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 2. – С. 52–58.

5 Analysis of the loading on an articulated flat wagon of circular pipes loaded with tank containers / O. Fomin, J. Gerlici, A. Lovska, K. Kravchenko // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11, is. 12. – Article 5510. – 12 p.

6 **Васильев, С. М.** Моделирование соударений вагонов при сухом трении в опорах груза / С. М. Васильев, А. Д. Железняков, Л. П. Целковикова // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2016. – № 2. – С. 10–12.

7 **Петрачков, С. А.** Компьютерное моделирование длинномерных грузов на сцепе из двух платформ / С. А. Петрачков, М. Г. Гегедеш // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2022. – № 2 (45). – С. 117–120.

8 **Varazhun, I.** Modeling of the interaction between cargo tiers and flatcar during the collision of cars / I. Varazhun, A. Zavarotny // Technol. – 2013. – Roc. 5, is. 4. – P. 195–198.

9 **Chaganova, O. S.** Fastenings parameters determination for highly deformative cargo, taking into account its durability during transportation in cars and trains / O. S. Chaganova, I. A. Varazhun // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2018. – Vol. 7, is. 3. – P. 218–222.

10 **Ворожун, И. А.** Выбор рациональных параметров крепления труб на железнодорожной платформе / И. А. Ворожун // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2007. – № 1. – С. 154–157.

I. A. VARAZHUN¹, A. U. VARAZHUN¹, M. G. GEGEDESH^{1,2}

¹*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

²*Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus*

A COMPARISON OF METHODS FOR THE LONG CARGO PLACING ON FLATCAR COUPLINGS

The variants for arranging and securing long cargo on couplings consisting of two or three railway flatcars are considered. Mathematical modeling is used to determine the forces in the longitudinal cargo-flatcar fixing elements, as well as in the inter-car connections during car collisions. It is shown that the forces in the fixing elements and in the inter-car connections differ slightly when two and three flatcars are coupled.

Keywords: long cargo, platform coupling, car collision, longitudinal forces.

Получено 30.10.2025

УДК 629.4.027:004.94

М. Г. ГЕГЕДЕШ^{1,2}, *Н. В. КОМАРОВСКИЙ*¹, *Р. В. РАХИМОВ*³,
*П. М. АФАНАСЬКОВ*¹

¹*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

²*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
Гомель, Беларусь*

³*Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент,
Узбекистан*

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОКОВОЙ РАМЫ ТЕЛЕЖКИ ГРУЗОВОГО ВАГОНА

Представлено сравнение данных, которые получены в ходе натурных испытаний боковой рамы тележки грузового вагона, с результатами расчета напряженно-деформированного состояния, проведенного средствами программных пакетов инженерного анализа SolidWorks и ANSYS Workbench (Static Structural). На основе анализа рассчитанных в среде ANSYS значений напряжений в боковой раме тележки определены зоны первичного разрушения при циклических нагрузках, а также коэффициенты запаса прочности для исследуемого конструктивного элемента железнодорожного подвижного состава.

Ключевые слова: железнодорожный подвижной состав, прочность несущих элементов, напряженно-деформированное состояние, компьютерное моделирование, коэффициент запаса прочности.

Прочность и надежность несущих элементов конструкции железнодорожного подвижного состава играют ключевую роль в обеспечении безопасности перевозок и определяют срок службы вагонов. Основным элементом ходовой части вагона является тележка, на которую опирается кузов. В свою очередь, одной из важнейших составных частей тележки является боковая рама, которая принимает нагрузки от кузова и передает их на буксовые узлы и далее на рельсовый путь. В процессе эксплуатации элементы рамы подвергаются действию значительных статических и динамических нагрузок, что приводит к усталостным повреждениям [1, 2].

При выполнении анализа прочности боковых рам руководствуются стандартом [3]. Для повышения точности расчета показателей надежности конструкции и минимизации объема испытаний на этапе проектирования активно применяется численное моделирование с использованием специализированных инженерных программных пакетов. Так, в работах [4, 5] предлагается междисциплинарный метод анализа для оценки усталостной долговечности и прочности конструкции кузова железнодорожного вагона при случай-

ных динамических нагрузках на основе мультифизического моделирования динамики подвижного состава и метода конечных элементов, которые позволили получить временные зависимости нагрузки для анализа долговечности и оценки остаточного срока службы.

Авторами [6] с использованием метода конечных элементов получены распределения напряжений в конструкции локомотива и сцепленного с ним вагона от действия сил в автосцепном устройстве при различных динамических нагрузках. На исследование влияния различных динамических нагрузок на напряженно-деформированное состояние отдельных конструктивных элементов пассажирского железнодорожного подвижного состава направлены работы [7, 8]. В исследовании [9] автор применяет метод конечных элементов для анализа прочности боковых стоек грузового вагона под действием перевозимого груза.

В работе [10] отмечается, что действующие нормативные документы, на основании которых осуществляется расчетная оценка прочности грузовых вагонов и их составных частей, учитывают не все результаты современных исследований (например, [11]), что может стать причиной недостаточной прочности новых конструкций соединительных балок вагонов повышенной вместимости. Авторами на основе расчета напряженно-деформированного состояния обсуждаемых конструкций в среде ANSYS установлено, что основным повреждающим воздействием, приводящим к их разрушению, является поперечная перевалка кузова вагона.

Цель настоящего исследования заключается в сопоставлении данных, которые получены при натурных испытаниях боковых рам тележек, с результатами расчетов, выполненных методом конечных элементов с использованием специализированных инженерных программных комплексов.

Результаты проведенных испытаний [12] показали, что основные повреждения боковой рамы тележки наблюдались в области сливного отверстия. Усталостные трещины зарождались в месте перехода закругления рамы к площадке под пружины. В отдельных случаях в изломе фиксировалось небольшое количество флокенов, аналогичные повреждения были замечены и на наклонном поясе.

С целью дальнейшего совершенствования методики проведения усталостных испытаний было проведено сравнение данных, полученных при испытаниях [12], с результатами расчетов параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемого конструктивного элемента при компьютерном моделировании в SolidWorks и ANSYS Workbench (модуль Static Structural).

Конечно-элементные модели боковой рамы тележки были созданы на основе предварительно разработанной твердотельной трехмерной модели, описывающей геометрию реального объекта (рисунок 1, *a*). Принято, что конструкционная сталь обладает следующими характеристиками: модуль упругости $2 \cdot 10^{11}$ Па;

коэффициент Пуассона 0,3; предел текучести 241 МПа. При создании модели использованы объемные тетраэдральные конечные элементы.

Граничные условия включали закрепления в зонах сопряжения с наддрессорной балкой и буксовыми узлами. Нагрузки имитировали действие веса кузова (вертикальная нагрузка, равная 230 кН в зоне установки пружин) и сил взаимодействия с рельсовым путем (боковая нагрузка, приложенная в зонах буксовых узлов и имитирующая воздействие горизонтальных сил от колесной пары, равная 80 кН) в соответствии с [3].

В ходе вычислений получено распределение эквивалентных напряжений по Мизесу (рисунок 1, б и в). При этом расхождение в результатах компьютерных расчетов не превысило 0,1 %.

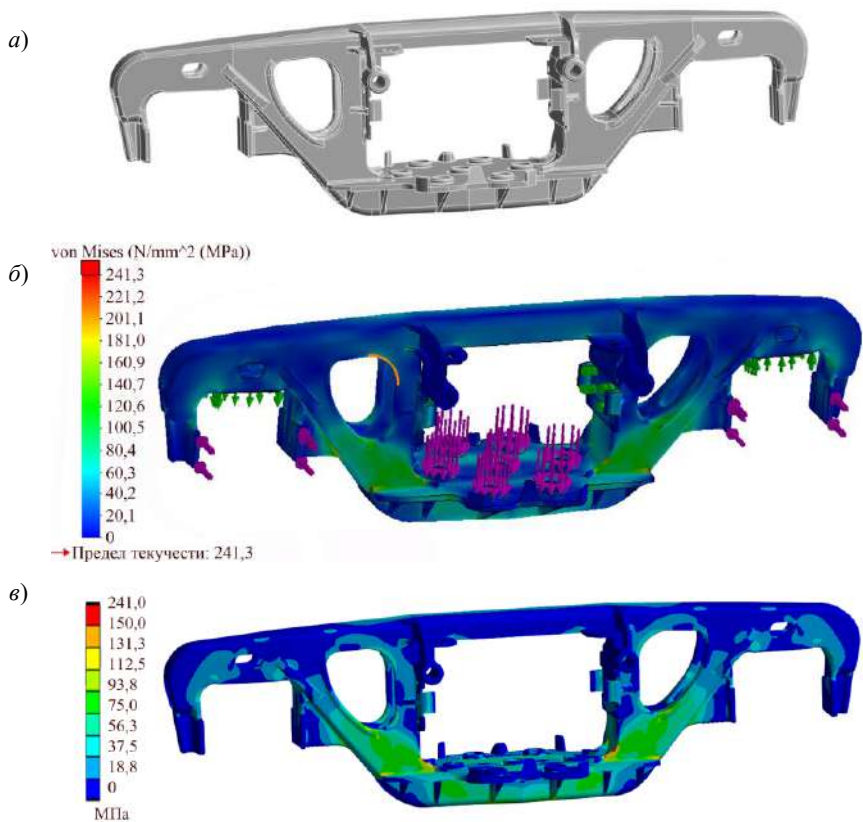


Рисунок 1 – Геометрическая модель (а) и результаты расчета эквивалентных по Мизесу напряжений в боковой раме тележки, полученные в SolidWorks Simulation (б) и ANSYS (в)

Установлено, что коэффициент запаса прочности для наиболее нагруженных областей боковой рамы составляет 0,273 (рисунок 2), следовательно, при подобных повторяющихся нагрузках конструктивный элемент не выдержит нормативный срок службы.

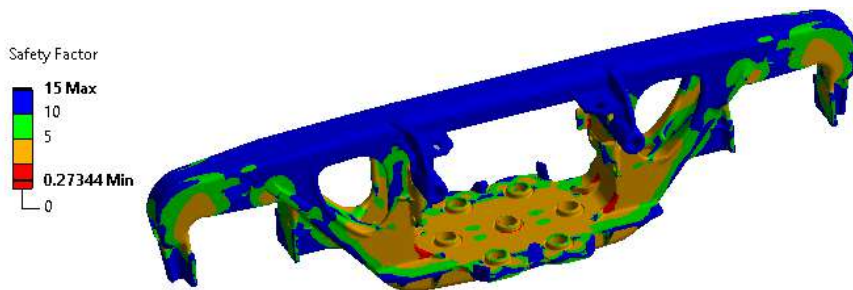


Рисунок 2 – Результаты расчета коэффициентов запаса прочности, полученные в ANSYS Workbench (модуль Static Structural)

Сравнение результатов натуральных испытаний и компьютерных экспериментов показывает, что разница в значениях напряжений составляет не более 3 %. Полученный результат свидетельствует о достаточной точности и достоверности примененных алгоритмов компьютерного моделирования, что позволяет использовать их для уточнения методик усталостных испытаний элементов конструкций железнодорожного подвижного состава, например, при выборе мест расположения датчиков напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Evaluation of fatigue crack growth behavior of bogie frames under operating load / J. W. Seo, H. M. Hur, S. J. Kwon, K. H. Moon // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2024. – Vol. 38, is. 6. – P. 2919–2929.

2 **Kraft, S.** Calibration and validation of fatigue design models for railway car bodies considering uncertainty / S. Kraft, H. L. Blum, C. Gomes Alves // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. – 2023. – Vol. 46, is. 12. – P. 4694–4711.

3 ГОСТ 33211–2014. Вагоны грузовые. Требования к прочности и динамическим качествам. – М. : Стандартинформ, 2020. – 53 с.

4 Evaluation of railway vehicle car body fatigue life and durability using multi-disciplinary analysis method / B. Miao, W. Zhang, J. Zhang, D. Jin // *International Journal of Vehicle Structures & Systems*. – 2009. – Vol. 1, is. 4. – P. 85–92.

5 Analysis methods of the dynamic structural stress in a full-scale welded carbody for high-speed trains / Y. Lu, H. Zheng, C. Lu [et al.] // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2018. – Vol. 10, is. 10. – P. 1–16.

6 Numerical simulation of bearing capacity of carbody for high-speed train subjected to longitudinal impact / R. Qin, F. Gao, T. Wang, B. Chen // *Journal of Traffic and Transportation Engineering*. – 2021. – Vol. 21, is. 6. – P. 209–224.

7 Исследование усталостной прочности пружин рессорного подвешивания скоростных грузовых вагонов / С. В. Чунин, Э. С. Оганьян, Г. И. Гаджиметов [и др.] // *Известия Транссиба*. – 2023. – № 2 (54). – С. 42–49.

8 **Очирхуу, Д.** Оценка остаточного ресурса и продление сроков службы пассажирских вагонов УБЖД / Д. Очирхуу // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. – 2014. – № 3 (43). – С. 97–103.

9 **Антропова, Т. А.** Оценка характеристик сопротивления усталости с применением конечно-элементного анализа / Т. А. Антропова // *Вестник науки*. – 2025. – Т. 5, № 8 (89). – С. 299–305.

10 **Цыганская, Л. В.** Обеспечение усталостной прочности соединительных балок четырехосных тележек многоосных грузовых вагонов / Л. В. Цыганская, Д. Г. Бейн // *Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта*. – 2025. – Т. 84, № 2. – С. 104–112.

11 Анализ характеристик износа пятниковых зон надрессорных и соединительных балок / Ю. Н. Аксенов, А. Ю. Богачев, Н. В. Павлов [и др.] // *Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта*. – 2000. – № 3. – С. 40–45.

12 **Комаровский, Н. В.** Усталостные испытания боковых рам и надрессорных балок тележек грузовых вагонов / Н. В. Комаровский, А. Г. Отока, М. Г. Гегедеш // *Транспортное машиностроение*. – 2025. – № 8. – С. 55–65.

M. G. GEGEDESH^{1,2}, M. U. KAMAROUSKY¹, R. V. RAKHIMOV³, P. M. AFANASKOV¹

¹*Belarussian State University of Transport, Gomel, Belarus*

²*Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus*

³*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

STRESS-STRAIN STATE MODELING FOR A FREIGHT CAR BODY SIDE FRAME

The data obtained during full-scale tests of a freight car bogie side frame is compared with the results of stress-strain state calculations performed using SolidWorks and ANSYS Workbench (Static Structural) engineering analysis software. Based on the analysis of ANSYS-calculated bogie side frame stress values, the primary failure zones under cyclic loads are determined, as well as the safety factors for this structural component of the rolling stock.

Keywords: rolling stock, load-bearing element strength, stress-strain state, computer modeling, safety factor.

Получено 30.10.2025

УДК 625.031.1:004.94

М. Г. ГЕГЕДЕШ^{1,2}, Т. С. ЯКИМЧИК², Р. В. ШИЛО³

¹*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь*

²*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

³*Могилевское отделение Белорусской железной дороги, Могилев, Беларусь*

ПОВЫШЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА В КРИВЫХ МАЛОГО РАДИУСА

Предложена конструкция соединительного упорного элемента контррельса, изготовленного из старогодных рельсов, с установкой на путевой рельс через специально изготавливаемое крепление. В среде ANSYS Workbench разработана конечно-элементная модель предлагаемого соединительного элемента. На основе анализа напряженно-деформированного состояния конструкции сделаны выводы о ее прочности и долговечности при эксплуатации в кривых малого радиуса.

Ключевые слова: кривые малого радиуса, контррельс, соединительный элемент, компьютерное моделирование, напряженно-деформированное состояние.

Высокая плотность застройки в местах расположения подъездных и внутризаводских железнодорожных путей приводит к необходимости проектирования кривых малого радиуса. На таких участках при движении подвижного состава могут возникать значительные горизонтальные силы, которые становятся причиной существенного износа колесных пар и рельсов, а также ведут к поперечному смещению рельсовой колеи и, как итог, сходу железнодорожного подвижного состава [1].

Результаты исследования [2] показали, что износ рельсов, который влияет на сход подвижного состава с пути, в значительной мере зависит от радиуса кривой. Авторами [3] на основе моделирования динамического взаимодействия подвижного состава с криволинейным участком железнодорожного пути, выполненного методом конечных элементов, произведена оценка влияния неисправностей элементов креплений на безопасность движения железнодорожного транспорта и сохранность верхнего строения пути. В публикации [4] дополнительно учтено возвышение наружного рельса колеи.

В названных исследованиях центробежная сила принималась постоянной по величине, что соответствует постоянному радиусу закругления кривой железнодорожного участка. Авторами [5, 6] оценивается влияние переменности радиусов кривых на возможное возникновение вынужденных колебаний рельсо-шпальной решетки при динамическом взаимодействии колес и рельсов, которое вызывает появление транспортного шума [7–10].

Значительную опасность для железнодорожного состава представляет движение по криволинейному участку пути малого радиуса, при котором направление перемещения тележки (рисунок 1) обеспечивается гребнем колеса передней колесной пары, набегающим на наружный рельс. Задняя колесная пара в зависимости от сил, действующих на тележку со стороны кузова вагона и рельсов, в этом случае может как прижиматься гребнем к наружному рельсу, так и ударяться о контррельс либо оставлять зазор между гребнем колеса и контррельсом [11–13].



Рисунок 1 – Схема двухосного экипажа при вписывании в кривую малого радиуса

При радиусах кривых менее 350 м Техническими требованиями по эксплуатации кривых участков железнодорожного пути с колесей 1520 мм на Белорусской железной дороге регламентируется установка контррельсов, которая предусматривает их укладку со стороны внутренней нити [14].

Единая конструкция контррельса до настоящего времени не разработана. Так, в патенте [15] предложено техническое решение составного контррельса на основе использования прокатного профиля СП-850. Опыт эксплуатации конструкции более чем на 20 предприятиях России продемонстрировал значительное снижение износа рельсов упорной нити, повышение сопротивления сдвигу, причем удалось исключить сходы подвижного состава.

Целью представленной работы является оценка долговечности усовершенствованной конструкции контррельса на основе моделирования напряженно-деформированного состояния соединения его элементов.

Создано техническое решение контррельса, при котором он может быть изготовлен из старогодных рельсов типа Р50 и установлен на путевой рельс через изготавливаемое крепление (рисунок 2). Также могут применяться рельсы с дефектами поверхности катания, подлежащие изъятию из пути. В качестве рабочей грани контррельса используется наименее изношенное место рельса – его подошва. Крепление разработано с установкой ширины желоба 75 мм, что соответствует требованиям (64–85 мм) и обеспечивает наиболее эффективную эксплуатацию устройства. Конструкция позволяет

производить регулировку ширины желоба за счет установки типовых регулировочных прокладок. Крепление осуществляется типовыми шурупами и болтами, используемыми в путевом хозяйстве. Конфигурация контррельса такова, что позволяет беспрепятственно производить измерение геометрических параметров рельсовой колеи шаблоном ПШ-1520.

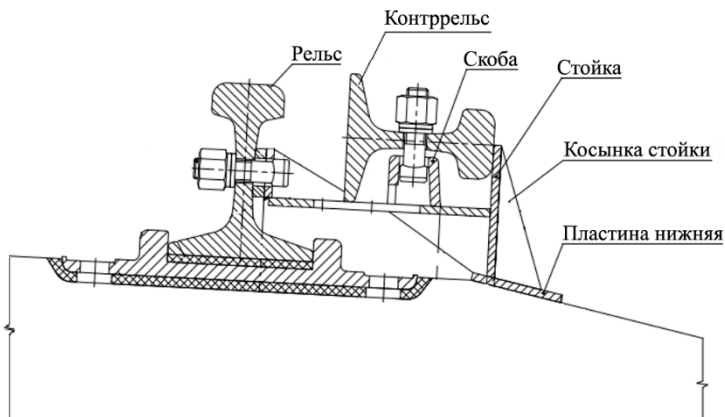


Рисунок 2 – Схема разработанного соединительного элемента конструкции

В среде ANSYS Workbench разработана конечно-элементная модель соединительного элемента контррельса (рисунок 3). При построении сетки конечных элементов использованы преимущественно тетраэдральные элементы, что обусловлено сложной геометрией конструкции. Характеристики материала: модуль упругости – $2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона – 0,3.

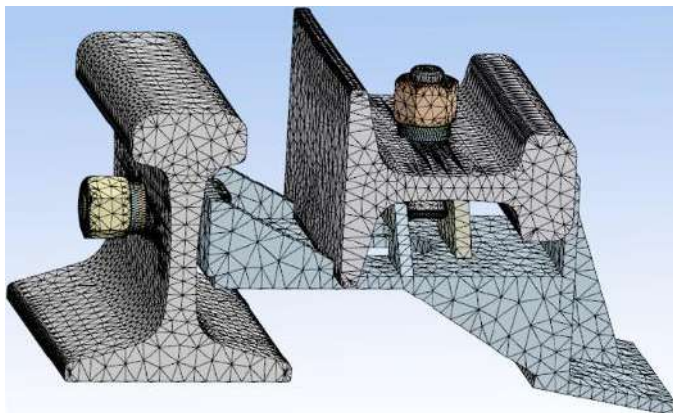


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель упорного соединительного элемента конструкции контррельса

Основная нагрузка на контррельс возникает вследствие действия боковых сил инерции. Параметры нагружения подошвы горизонтально расположенного рельса приняты в соответствии с реальными практическими условиям: воспринимаемая статическая нагрузка составляет 10 т (100 кН), площадь ее распределения соответствует площади касания гребня колеса. При назначении граничных условий фиксировались от перемещения по всем направлениям опорная поверхность вертикально стоящего рельса, по которому производится движение поезда, а также опорная поверхность соединительного элемента.

На рисунке 4 приведены результаты расчета максимального числа циклов нагружения конструкции, которое материал выдерживает до разрушения. Вычисление этого показателя осуществлялось на основе $S-N$ кривой материала (кривой «напряжение – долговечность») [16, 17] для рассмотренных условий нагружения конструкции. Из представленной схемы следует, что наиболее подвержено риску разрушения место стыковки горизонтально расположенного рельса с конструкцией соединительного башмака, которое способно выдержать менее 40 циклов нагружения. Также невысокой долговечностью обладает косынка стойки. При эксплуатации конструкции на участках, для которых характерна достаточно высокая интенсивность движения железнодорожных составов, в указанных выше местах требуется усиление.

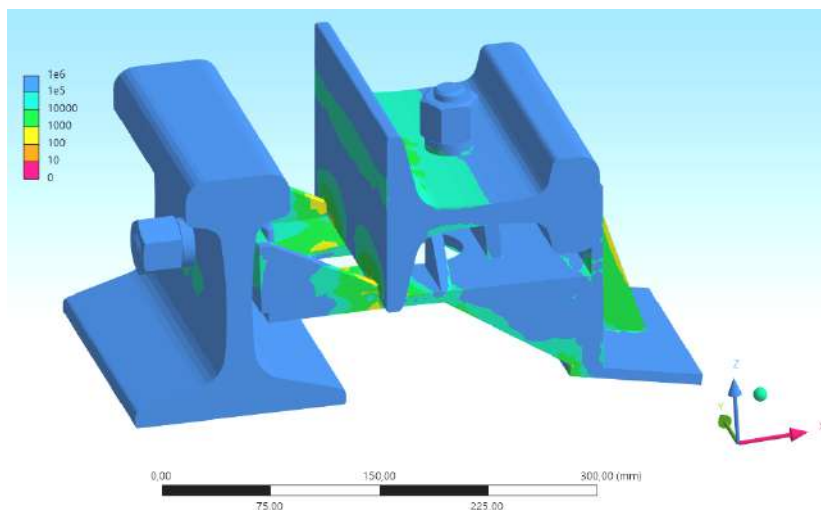


Рисунок 4 – Результаты расчета числа циклов нагружения до разрушения конструкции

Предложенная конструкция в настоящее время используется в кривых, уложенных на железнодорожных путях станций Гомель и Могилев-1 (рисунок 5), где нагрузки не достигают максимально возможных (10 т).



Рисунок 6 – Опытная установка контррельса в кривой радиусом 200 м на подъездных путях в г. Гомеле и станции Могилев -1

Выполненное исследование показывает, что рассматриваемая конструкция контррельса может быть использована в криволинейных участках железнодорожного пути малого радиуса (350 метров и менее) с небольшой интенсивностью поездной работы, при движении по которым узел крепления контррельса к ходовому рельсу будет испытывать нагрузки, значительно меньшие расчетных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Варенцов, В. В.** Контррельс для кривых малого радиуса / В. В. Варенцов, А. В. Петраш // Транспорт Российской Федерации. Журнал о науке, практике, экономике. – 2010. – № 3 (28). – С. 60.
- 2 Influence of heavy haul railway curve parameters on rail wear / J. Wang, X. Chen, X. Li, Y. Wu // Engineering Failure Analysis. – 2015. – Vol. 57. – P. 511–520.
- 3 **Zhou, L.** Dynamic analysis of a high-speed train operating on a curved track with failed fasteners / L. Zhou, Z. Shen // Journal of Zhejiang University. Science A. – 2013. – Vol. 14, is. 6. – P. 447–458.
- 4 **Xu, L.** Probabilistic assessment of railway vehicle curved track systems considering track random irregularities / L. Xu, W. Zhai // Vehicle System Dynamics. – 2018. – Vol. 56, is. 10. – P. 1552–1576.
- 5 Curved ballasted track – vehicle dynamic interaction : Effects of curve radius and track structural nonlinearity / L. Pan, L. Xu, X. Chen, Z. Zhu // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2021. – Vol. 16, is. 7. – Article 071004. – 10 p.
- 6 **Kaewunruen, S.** Spectro-temporal responses of curved railway tracks with variable radii of arc curves / S. Kaewunruen, C. Ngamkhanong, X. Liu // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2019. – Vol. 19, is. 4. – Article 1950044. – 22 p.
- 7 **Pombo, J. C.** Application of a wheel – rail contact model to railway dynamics in small radius curved tracks / J. C. Pombo, J. A. C. Ambrósio // Multibody System Dynamics. – 2008. – Vol. 19, is. 1–2. – P. 91–114.
- 8 **Wang, Z.** Analysis of influence factors of rail corrugation in small radius curve track / Z. Wang, Z. Lei // Mechanical Sciences. – 2021. – Vol. 12, is. 1. – P. 31–40.

9 **Cui, X.** Influence of wheelset structure and fastener stiffness on rail corrugation / X. Cui, G. Chen, H. Yang // Journal of Southwest Jiaotong University. – 2017. – Vol. 52, is. 1. – P. 112–117.

10 **Michálek, T.** Reduction of lateral forces between the railway vehicle and the track in small-radius curves by means of active elements / T. Michálek, J. Zelenka // Applied and Computational Mechanics. – 2011. – Vol. 5, is. 2. – P. 187–196.

11 **Панькин, Н. А.** Причины интенсивного износа гребней колеса и рельса и пути его устранения / Н. А. Панькин // Железнодорожный транспорт. – 1991. – № 11. – С. 57–59.

12 **Воробьев, А. А.** Контактное взаимодействие колеса и рельса / А. А. Воробьев // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2009. – № 3 (39). – С. 42–47.

13 **Хохлов, А. А.** Анализ проблемы взаимодействия колеса с рельсом / А. А. Хохлов, С. И. Тимков, Д. В. Зотов // Железнодорожный транспорт. – 2005. – № 3. – С. 65–67.

14 Правила технической эксплуатации железной дороги в Республике Беларусь: [утв. М-вом трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь 25.11.15 № 52 : с изм. 31.05.22 № 64 : вступ. в силу с изм. 30.10.22]. – Минск : Энергопресс, 2022. – 763 с.

15 Полезная модель RU 165319 U1, МПК E01B 5/18, E01B 9/68 (2006.01). Устройство для обеспечения безопасности движения и уменьшения бокового износа рельсов в кривых : № 2016113249/11 : заявлено 06.04.2016 : опубл. 10.10.2016 / Алехин А. Л., Алехин Л. И., Варенцов В. В., Петраш А. В. ; патентообладатель Научно-производственное предприятие «Путьсервис». – 7 с.

16 **Саидова, А. В.** Современные методы моделирования динамики подвижного состава / А. В. Саидова, А. М. Орлова. – М. : Учеб.-метод. центр по образованию на ж.-д. трансп., 2025. – 96 с.

17 **Берендеев, Н. Н.** Методы решения задач усталости в пакете Ansys Workbench : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Берендеев. – Н. Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2020. – 73 с.

M. G. GEGEDESH^{1,2}, T. S. YAKIMCHIK², R. V. SHILO³

¹*Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

³*Mogilev Division of the Belarusian Railway, Mogilev, Belarus*

IMPROVING RAILROAD ROLLING STOCK SAFETY IN SMALL-RADIUS CURVES

A design for a connecting stop element for a check rail made from scrap rails is proposed. It is mounted on the track rail via a custom-made fastener. A finite element model of the proposed connecting element is developed in ANSYS Workbench. Based on the structure stress-strain state analysis, there are formulated the conclusions regarding its strength and durability at operating in small-radius curves.

Keywords: small-radius curves, check rail, connecting element, computer modeling, stress-strain state.

Получено 31.10.2025

УДК 533.6.011:004.94

О. В. ДЕМЬЯНЧУК

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ СЦЕПА ВАГОНОВ-ХОППЕРОВ

В программном комплексе ANSYS Fluent выполнено компьютерное моделирование обтекания воздушным потоком отцепа, включающего два вагона-хоппера. Получены картины распределения давлений на лобовой и боковой поверхностях вагонов. Анализ схем распределения скоростей потока показал наличие завихрений в межвагонном пространстве, непосредственно за хвостовым вагоном, также у боковых поверхностей первого вагона отцепа. Определены аэродинамические силы и значения коэффициентов аэродинамического сопротивления вагонов.

Ключевые слова: аэродинамика, конечно-элементное моделирование, обтекание потоком воздуха, аэродинамический коэффициент.

В настоящее время существует необходимость определения действующих на железнодорожный подвижной состав сил, в том числе и аэродинамических, с учетом особенностей конструкции различных типов вагонов. Авторы [1] отмечают, что аэродинамическое сопротивление составляет значительную долю от общего сопротивления подвижного состава, варьируясь от относительно небольших значений при низких скоростях до более чем 50 % при скоростях, превышающих 100 км/ч. Поэтому в существующих условиях с развитием цифровизации процессов при эксплуатации транспортных средств важно учитывать аэродинамические особенности конструкции подвижного состава. Анализ аэродинамики транспортных средств может выполняться на основе проведения испытаний (как натуральных, так и в аэродинамической трубе), а также с использованием компьютерного моделирования. Последний способ обеспечивает получение результатов с достаточной степенью точности, а также позволяет снизить стоимостные и временные затраты по сравнению с другими методами.

Так, на основе исследований авторами [3] обтекания воздушным потоком высокоскоростного поезда, выполненных в соответствии со стандартом EN 14067-6:2010 [2], было установлено, что при условии верификации модели на основе экспериментальных данных CFD-моделирование (CFD – Computational Fluid Dynamics) позволяет определять аэродинамические характеристики поездов (аэродинамические силы, коэффициент аэродинамического сопротивления и др.) с высокой степенью точности.

Сравнение результатов компьютерного моделирования обтекания воздушным потоком поезда с испытаниями в аэродинамической трубе, выполненное в работе [4], показало, что численное моделирование позволяет получить

достоверные результаты, предоставляя возможность перехода к анализу полноразмерного поезда. Также авторами [4] установлено, что изменение высоты пантографа оказывает незначительное влияние на аэродинамическое сопротивление движению поезда при различных его конфигурациях.

С учетом повышения скорости движения поездов и требованиям к обеспечению их энергоэффективности возникает необходимость исследования аэродинамики грузовых поездов. Так, результаты численных расчетов аэродинамики воздушного потока вокруг загруженной контейнером платформы с учетом исследования возможностей применения различных способов моделирования турбулентности представлены в работе [5]. Авторами установлено хорошее согласование полученных аэродинамических характеристик с результатами экспериментов в аэродинамической трубе, что позволило в дальнейшем рассмотреть состав поезда, включающий несколько платформ, загруженных контейнерами.

Выполненное в работе [6] исследование влияния бокового ветра на контейнерный поезд показало, что при перевозке контейнеров на платформах необходимо учитывать их аэродинамические характеристики для обеспечения устойчивости вагона и надежности крепления контейнера, особенно при значительных углах атаки ветрового потока. По результатам компьютерного моделирования с учетом различных вариантов конфигурации поезда (учитывались различные схемы загрузки платформ и ветровые условия) авторами [7] установлены коэффициенты аэродинамического сопротивления рассматриваемого подвижного состава.

В работе [8] выполнено исследование обтекания воздушным потоком поезда, включающего от 10 до 14 полувагонов, на основе компьютерного моделирования, а также испытаний в аэродинамической трубе, которые позволили верифицировать разработанную модель. Авторами [8] установлено, что аэродинамические характеристики вагонов, располагаемых в середине состава, практически не зависят от общего количества вагонов. Таким образом, при дальнейших исследованиях целесообразно рассматривать состав из шести вагонов, что позволяет сократить продолжительность вычислений при компьютерном моделировании и использовать модели большего масштаба при испытаниях в аэродинамической трубе, сохранив достоверность вычислений.

Методика анализа аэродинамических характеристик полувагонов с помощью компьютерного моделирования, разработанная в исследовании [9], позволила установить значения сил аэродинамического сопротивления движению поезда, а также получить картины распределения давлений на вагоны состава в груженом и порожнем состояниях. Расхождение полученных результатов с данными экспериментов не превысило 15 %.

Анализ влияния конфигурации состава грузового поезда на его аэродинамические характеристики, выполненный в работе [10], позволил установить, что наименьшее аэродинамическое сопротивление обеспечивается при следующем варианте расположения вагонов в составе: крытый вагон, платформа,

вагон-цистерна. Наихудшим вариантом является следующий порядок вагонов: платформа, крытый вагон, вагон-цистерна.

В работе [11] было выполнено исследование влияния бокового ветра на аэродинамические характеристики состава поезда, включающего крытый вагон, полувагон и цистерну (при этом угол атаки рассматривался в диапазоне от 0 до 40°). Результаты компьютерного моделирования показали, что изменение схемы формирования поезда оказывает значительное влияние величину боковой силы, что необходимо учитывать для обеспечения боковой устойчивости состава. Также авторами установлено, что изменение аэродинамического сопротивления при различных схемах формирования поезда может достигать 20,5 %.

Влияние конфигурации состава на аэродинамические силы, воздушный поток и его топологию рассмотрено в работе [1]. Исследование проводилось для составов поездов, включающих 5, 7, 9 и 11 вагонов. Достоверность численных результатов была подтверждена сравнением с результатами испытаний в аэродинамической трубе. Результаты моделирования показали, что конфигурация поезда не оказывает существенного влияния на аэродинамическое сопротивление промежуточных грузовых вагонов, однако наблюдается снижение аэродинамического сопротивления хвостового вагона с увеличением длины состава. Также увеличение длины состава усиливает интенсивность воздушного потока, но не влияет на максимальные значения его скорости. Установлено, что для более коротких составов поездов характерен более высокий уровень турбулентности.

Ранее в работе [12] нами был выполнен анализ обтекания воздушным потоком одиночных вагонов различных типов. Целью данной работы стало исследование обтекания сцепы из двух вагонов-хопперов для перевозки цемента.

На рисунке 1 представлена геометрическая модель, включающая расчетную область и вагоны-хопперы упрощенной конструкции.

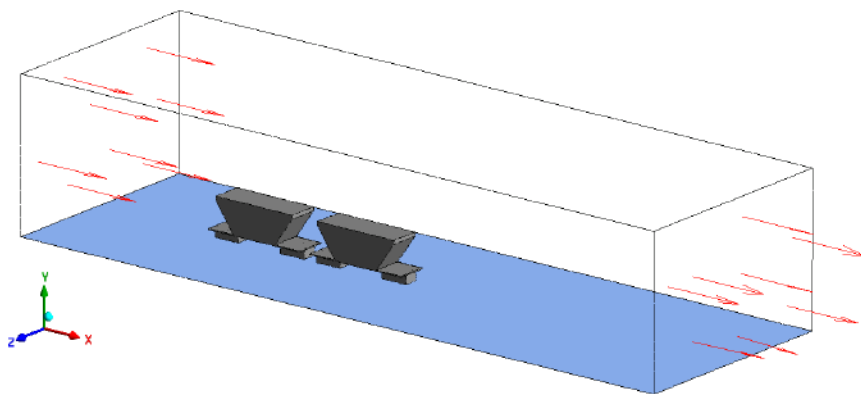


Рисунок 1 – Компьютерная модель расчетной области с вагонами-хопперами

По результатам выполненных ранее расчетов [13] было установлено, что расхождения в результатах моделирования при использовании модулей CFX и Fluent не превышают 7 %. В данном исследовании моделирование обтекания воздушным потоком вагонов выполнено с помощью программного комплекса ANSYS Fluent. Размеры расчетной области (длина – 80 м, ширина – 30 м, высота – 16 м) были определены на основании обеспечения получения достоверных результатов с учетом минимизации продолжительности вычислений.

Граничные условия задавались аналогично представленным в работе [14], за исключением боковых и верхней поверхностей расчетной области, для которых в модуле Fluent задавалось условие жесткой стенки Wall. Исходными параметрами расчета приняты: тип среды – воздух с температурой 288 К; давление – 100 кПа; плотность – $1,225 \text{ кг/м}^3$; вязкость – $1,831 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ [12].

По результатам компьютерного моделирования получены распределения давления на лобовых (рисунок 2) и боковых (рисунок 3) поверхностях вагонов.

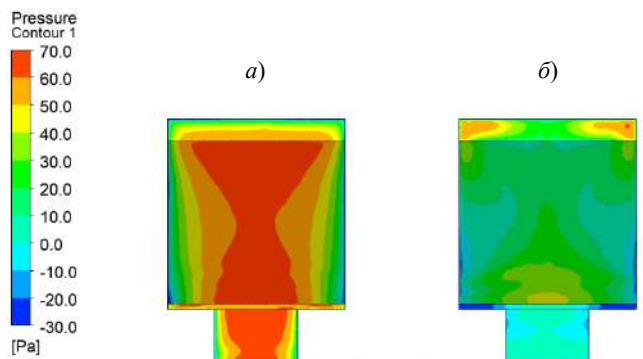


Рисунок 2 – Распределение давления на лобовых поверхностях вагонов:
а – первого по ходу движения; *б* – второго

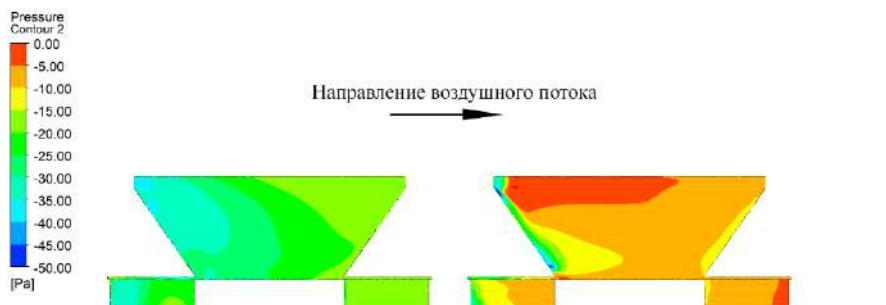


Рисунок 3 – Распределение давления на боковых поверхностях вагонов

На лобовой поверхности первого по ходу движения вагона-хоппера значения давлений заметно выше и достигают 70 Па. Для второго вагона давления имеют более низкие значения, при этом максимальное давление наблюдается в верхней части конструкции. На боковой поверхности обоих вагонов наблюдается зона отрицательных избыточных давлений (см. рисунок 3), причем в верхней части второго по ходу движения вагона значения давлений близки к нулю. Такое распределение давлений связано с наличием завихрений, которые хорошо заметны на рисунке 4. Возле первого вагона четко прослеживается зона отрывного течения.

Из картин линий тока, представленных на рисунке 5, видно наличие завихрений в межвагонном пространстве, а также непосредственно за хвостовым вагоном. Таким образом, позади первого и второго вагонов наблюдаются зоны с отрывным течением.

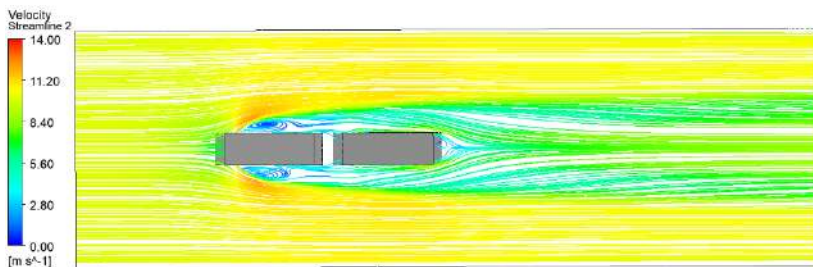


Рисунок 4 – Распределение скоростей потока в горизонтальном сечении расчетной области

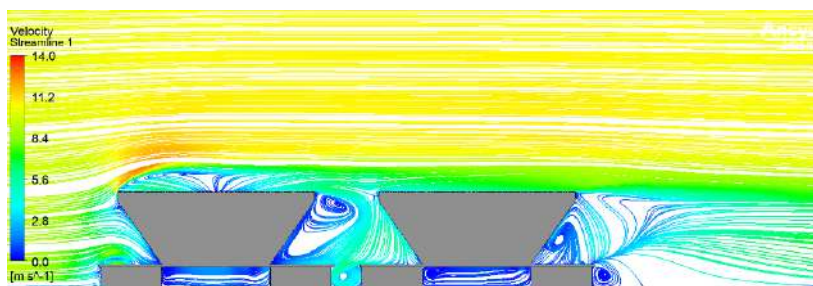


Рисунок 5 – Распределение скоростей потока в сечении расчетной области, параллельном оси железнодорожного пути

В соответствии с [15] коэффициент аэродинамического сопротивления

$$C_x = \frac{2F}{\rho v^2 A},$$

где F – значение силы, действующей на тело при обтекании его воздухом, Н; ρ – плотность воздуха, $\text{кг}/\text{м}^3$; v – скорость потока воздуха, $\text{м}/\text{с}$; A – наибольшая площадь поперечного сечения вагона-хоппера, м^2 .

Значения аэродинамических сил, действующих на вагоны, и коэффициента аэродинамического сопротивления приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Аэродинамические характеристики вагонов-хопперов

Вагон	Сила сопротивления, Н	Аэродинамический коэффициент	Подъемная сила, Н
Первый вагон сцепа	736,77	0,953	164,67
Второй вагон сцепа	393,57	0,510	–43,30
Одиночный вагон	679,66	0,880	109,52

Сравнение результатов с полученными значениями для одиночного вагона показывает, что силы аэродинамического сопротивления первого вагона сцепа и одиночного отличаются незначительно (для одиночного данное значение ниже на 8 %), однако значение подъемной силы увеличилось по сравнению с одиночным практически на 50 %. Для второго вагона в сцепе аэродинамические силы снижены более чем на 40 %, а вертикальная сила вместо подъемной стала прижимающей к поверхности земли.

Результаты, полученные на основе разработанной методики компьютерного моделирования обтекания вагонов потоком воздуха, достаточно хорошо согласуются с данными натурных испытаний [16]. Они могут быть использованы при автоматизации эксплуатации железнодорожного подвижного состава и оценке энергоэффективности грузовых перевозок. Также возможно использование представленной методики для анализа аэродинамики других транспортных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 A numerical study on the aerodynamics of express boxcars with different marshalling configurations / D. Zhou, C. Xia, H. Chen, S. Meng // Alexandria Engineering Journal. – 2025. – Vol. 133. – P. 638–652.
- 2 EN 14067–6:2018+A1:2022. Railway applications – Aerodynamics – Part 6: Requirements and test procedures for cross wind assessment. – Publication Date 20.07.2022. – 140 p.
- 3 Computational fluid dynamics simulation of rail vehicles in crosswind: Application in norms and standards / M. Sima, S. Eichinger, A. Blanco, I. Ali // Journal of Rail and Rapid Transit. – 2015. – Vol. 229, is. 6. – P. 635–643.
- 4 Experimental and numerical evaluation of the aerodynamic drag for different configuration of a conventional train / F. Moro, C. Somaschini, D. Rocchi [et al.] // Proceedings of the 9th International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications. – 2024. – 4 p.
- 5 Maleki, S. Assessment of various turbulence models (ELES, SAS, URANS and RANS) for predicting the aerodynamics of freight train container wagons / S. Maleki, D. Burton, M. C. Thompson // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2017. – Vol. 170. – P. 68–80.
- 6 Giappino, S. High-speed freight trains for intermodal transportation: Wind tunnel study on the aerodynamic coefficients of container wagons / S. Giappino, S. Melzi, G. Tomasini // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2018. – Vol. 175. – P. 111–119.

7 A field study on the aerodynamics of freight trains with different stacking configurations / A. Quazi, T. Crouch, J. Bell [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2023. – Vol. 232. – Article 105245. – 19 p.

8 **Golovanevskiy, V. A.** On the optimal model configuration for aerodynamic modeling of open cargo railway train / V. A. Golovanevskiy, V. V. Chmovzh, Y. V. Girka // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2012. – Vol. 107. – P. 131–139.

9 **Бороненко, Ю. П.** Определение аэродинамического сопротивления грузовых поездов с инновационными полувагонами на цифровых моделях / Ю. П. Бороненко, Б. О. Поляков, Т. М. Белгородцева // Транспорт Российской Федерации. – 2021. – № 3 (94). – С. 57–61.

10 Effect of the formation type with different freight vehicles on the train aerodynamic performance / X. Huo, T. Liu, Z. Chen [et al.] // Vehicle System Dynamics. – 2022. – Vol. 60, is. 11. – P. 3868–3896.

11 The effect of different marshalling forms on the aerodynamic performance of the freight train under crosswind / Z. Xie, Z. Wu, L. Zhu, W. Ding // Archives of Transport. – 2021. – Vol. 59, is. 3. – P. 57–71.

12 **Демьянчук, О. В.** Компьютерное моделирование обтекания воздушным потоком вагонов различных типов / О. В. Демьянчук // Актуальные вопросы машиноведения. – 2025. – Т. 14. – С. 247–250.

13 **Демьянчук, О. В.** Влияние граничных условий на результаты моделирования обтекания воздушным потоком железнодорожного вагона / О. В. Демьянчук // Современные проблемы машиноведения: сб. науч. тр. : в 2 ч. / ГГТУ им. П. О. Сухого; под общ. ред. А. А. Бойко. – Гомель, 2025. – Ч. 1. – С. 113–117.

14 **Демьянчук, О. В.** Моделирование обтекания вагона-хоппера потоком воздуха / О. В. Демьянчук // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 49–56.

15 Effects of different aerodynamic configurations on crosswind stability of a conventional train / C. E. A. Reyes, D. Rocchi, G. Tomasini [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2023. – Vol. 242. – Article 105588.

16 Правила и нормы проектирования сортировочных устройств на железных дорогах Союза ССР. – М. : Транспорт, 1992. – 104 с.

V. U. DZEMYANCHUK

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

SIMULATION OF AN AIR FLOW AROUND A COUPLE OF HOPPER CARS

Computer simulation of an air flow around two hopper railway cars is performed in the ANSYS Fluent software package. Pressure distribution diagrams are obtained on the frontal and side surfaces of the cars. Analysis of the flow velocity distribution diagrams shows the presence of vortex in the intercar space, directly behind the rear-end car. Vortexes are also observed near the side surfaces of the first car. The aerodynamic drag coefficients of the cars are determined based on the established aerodynamic forces.

Keywords: aerodynamics, finite element modeling, streamline by airflow, aerodynamic coefficient.

Получено 29.10.2025

UDC 624.07:004.032.26

A. ZHELTKOVICH¹, V. MOLOSH¹, A. VERAMEICHYK¹, D. MARMYSH²,
Y. LYU³, J. YANG³, Y. REN^{4,5}, N. MOU^{1,6}, K. PARCHOTZ¹

¹*Brest State Technical University, Brest, Belarus*

²*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

³*Dalian University of Technology, Dalian, China*

⁴*Nanchang Hangkong University, Nanchang, China*

⁵*Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus*

⁶*Shandong Huayu University of Technology, Dezhou, China*

DETERMINATION OF THERMAL AND SHRINKAGE STRESSES IN MONOLITHIC REINFORCED CONCRETE SLABS BASED ON A SLIDING FOUNDATION USING DEEP LEARNING NEURAL NETWORKS

In certain situations, the design step requires the creation of technological openings of various shapes, while the slab surface may have complex geometry. Determining the stress-strain state in such cases can be very labor-intensive or even impossible. This article presents an alternative method based on the use of 3D convolutional neural networks (CNNs) with a U-Net architecture and 3D Deep Convolutional Generative Adversarial Nets (DC-GAN), which allows for fairly accurate predictions of shrinkage and temperature stresses and displacements in reinforced concrete slabs on a sliding base, in a simpler way compared to finite element methods (FEM). The article highlights the promising potential of using neural networks in the area of construction design.

Keywords: thermal stresses, shrinkage stresses, concrete slabs, neural networks, deep learning.

Introduction. Due to the significantly increased use of monolithic concrete in construction, mainly in the manufacture of slabs for various purposes (floor slabs for buildings, bridge decks, overpasses, monolithic floors of industrial enterprises, public buildings and structures), there is a question of finding adequate methods for such structures analysis. These structures provide for very complex geometry, the presence of technological openings of various shapes, as well as special requirements for operation, that is typical for highways, airfield pavements. At nuclear power plants, workshops the behavior of the plate in the area of openings and process circuits throughout the entire life cycle should be taken into account in advance.

Practical realization of slabs on the base is associated with a number of difficulties, first of all, it refers to the evaluation of the initial stress-strain condition (SSC) at hardening and shrinkage (or expansion) of concrete, under the influence of not only the traditional constraint (reinforcement), but also the restricting influence of the base. At present, the existing calculation methods for the forced de-

formations (temperature, shrinkage) of such structures in some cases do not adequately evaluate the range of factors affecting the SSC of the slab. In the paper [1] the research of slab prototypes is carried out, the state of the question of the accepted parameters of concrete shear on the base is considered, the schemes of the developed shear devices are presented, the research of concrete prototypes under the shear is carried out, the analytical dependences of displacements under shear on the types of bases are obtained. The proposal to approximate the shear curve by a three-line diagram is justified for the "concrete-on-concrete" shear.

Nowadays, the basic normative document regulating for the design of floors of industrial, residential, public, administrative and household buildings in the republic of Belarus is "SN 5.09.01-2020" [2], within the European Union – EN 1992-1-1:2023 [3].

At designing, only two main parameters of concrete floor layers are set: slab thickness and concrete compressive strength class. There is no methodology for calculating stresses in such structures, taking into account the processes of temperature effects, shrinkage, expansion, occurring in concrete during the curing period when the designed layer interacts with the base. In order to exclude the limiting influence of the base on the SSC in slabs built on the base, a sliding layer is used, and to prevent shrinkage phenomena, reinforcement meshes are used.

The purpose of the paper

- 1 To illustrate the possibilities of artificial intelligence in mechanics.
- 2 To show the possibility of using soft computing with deep learning in design-related tasks.
- 3 To show the advantages of convolutional neural networks (CNN) in predicting forced displacements and stresses in reinforced slabs on the base.
- 4 To develop a database of slabs for training neural networks with subsequent integration with available data and data planned to be generated in future stages.

The ultimate goal of the research is to create a slab design method combining the advantages of theoretical models, finite element methods, and biosimilar technologies – a so-called hybrid.

Soft computing. Artificial neural network.

Due to recent advances in the field of computing systems and the development of new programming languages for solving complex engineering problems, significant part of researchers proposes to utilize the increased capabilities of soft computing [4–18].

According to the established approach [5], the following directions of soft computing can be distinguished:

- 1 Problems with fuzzy logic.
- 2 Problems solved with the help of neural networks (artificial neural networks).
- 3 Evolutionary modeling (genetic algorithms), etc.

The article [5] claims that the foundation of soft computing lies in its ability to adapt to the vast imprecision of the real world, unlike traditional hard computing.

Lotfi Zadeh formulated the principle of soft computing as follows: "tolerance of imprecision, uncertainty, and partial truth allows for ease of manipulation, robustness, reduced decision-making costs, and a more accurate correspondence to reality." According to [19], the use of neural networks (NN) for modeling is significantly simpler than traditional mathematical models. Although NNs employ mathematical relationships between nodes (neurons) and a process for minimizing learning error, the mathematical formulas themselves are not explicitly presented. Artificial neural networks can effectively predict concrete strength and structural resistance with an error of less than 10 % [19].

Research [4] indicates the potential for using neural networks as an alternative to mathematical models and experiments at the early design stage for quickly assessing the predicted behavior of reinforced concrete slabs under load, as well as for determining their load-bearing capacity and deflections.

The use of neural networks in engineering research significantly simplifies and accelerates computational processes.

Fundamental prerequisites. Sometimes, at the design stage, technological openings of various shapes are already made in the slab structure. This is due to the fact that the slabs can be installed in the workshops of industrial buildings, as well as in other premises and existing structures, where it is necessary to think in advance about the behavior of the slab in the places of the openings of the enclosing structures.

There are traditional approaches based on the use of finite element models, but they have certain, and sometimes significant, disadvantages. Among the existing approaches, both advantages and disadvantages can be distinguished as follows: the first approach uses temperature effects to model shrinkage deformations; the second approach does not take into account the nonlinear nature of the kinetics of concrete hardening in the first 28 days; the third approach does not take into account the nonlinear temperature change due to chemical reactions in the initial hardening phase; the fourth – inhomogeneity of the material and its certain anisotropy, which cause nonlinear and non-uniform change of SSC; the fifth – external temperature and humidity processes affecting the course of chemical reactions and distribution of stresses and strains.

Problem statement. At this stage, the task was to find an intelligent solution for the stresses and displacements caused by the shrinkage of reinforced concrete slabs with holes of various shapes, as well as monolithic slabs throughout the volume.

Data preparation for CNN and DCGAN training. A 5-dimensional matrix was created, it's all input and output parameters were recorded. The matrix consisted of the following dimensions: 1 – sample number, 2 – coordinate "X", 3 – coordinate "Y", 4 – coordinate "Z", 5 – vector of 17 parameters (physical and mechanical characteristics of slab concrete: stress, displacement, distance (radius vector from the center of the slab) to the center of the voxel, shape of the concrete

slab, concrete elasticity modulus, Poisson's ratio of concrete, concrete thermal expansion coefficient, free shrinkage deformation of concrete, strength of concrete, shape of reinforcement mesh, elastic modulus of steel, Poisson's ratio of steel, coefficient of thermal expansion of steel, diameter of reinforcement, free deformation of reinforcement at zero temperature, strength of steel, and reinforcement ratio.

The main difference from the investigation [20] was the change in the method of data submission. In this paper, volumetric elements were formed, i.e., due to the peculiarities of the Vox-to-Vox architecture of the neural network, data conversion from 3D coordinate representation to voxel representation was performed (Figure 1). The data were partitioned into $64 \times 64 \times 4$ voxels (16384 elements were evaluated) for neural network training before feeding. Thus, coordinates "2", "3", "4" were transformed into "distances", i. e. a vector obtained by calculation the moduli of the radius vectors from the origin to the center point of each 3D voxel (where in the slab is the hole (void) – this parameter was missing). In addition, the concrete and rebar form parameters – "concrete form", "rebar form" – were introduced, which are responsible for the number of the slab from the sample, with information about the shape of this slab, as well as about the number and shape of reinforcement meshes, respectively.

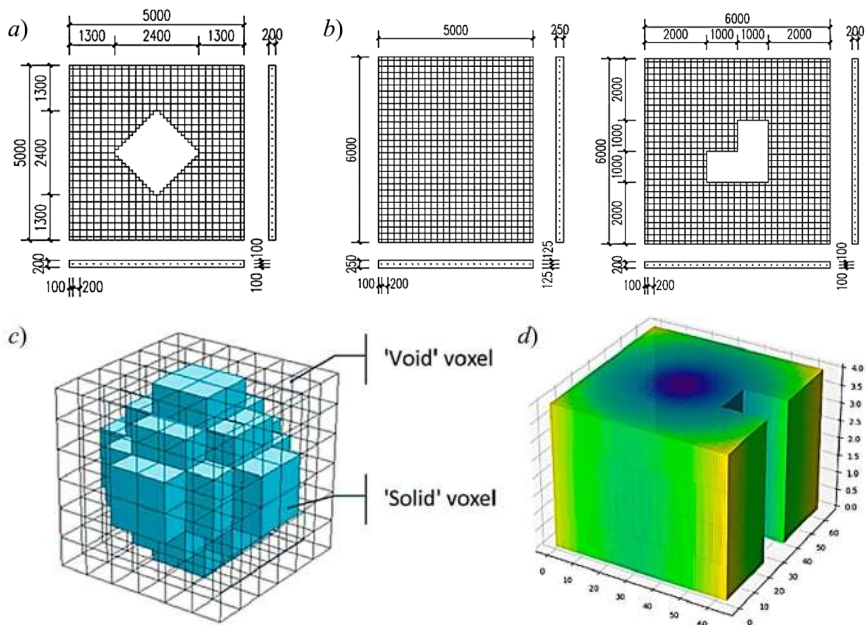


Figure 1 – Reinforced concrete slabs on the base:
a, b – slabs of different sizes with and without holes;
c – volumetric representation of data [21]; *d* – slab in voxel form

Initially, it was possible to vary 12 parameters at different levels: *concrete modulus of elasticity, concrete Poisson's ratio, concrete thermal expansion coefficient, concrete strength, concrete free shrinkage, reinforcement modulus of elasticity, reinforcement Poisson's ratio, reinforcement thermal expansion coefficient, reinforcement diameter, reinforcement relative strain, reinforcement strength, reinforcement coefficient.*

All slabs differed in the shape and location of the openings, as well as in the reinforcement ratio and the number of reinforcement meshes (single and double layer meshes were used). A set of 56 different slabs was developed. Examples of solid slab and slabs with holes are shown at figure 1, *a – 1, c*. The training set of 45 slabs has been randomly selected. The testing set included the remaining 11 slabs.

The purpose was to obtain the analysis results of the stress-strain state in the slab all over the volume. There were obtained the stresses and displacements for the CNN and DCGAN approaches in the ABAQUS, then the results were recorded in a feature vector. Just like the input data, where each voxel of the concrete slab was associated with all inherent features of the concrete and the reinforcement voxel with reinforcement features, the output concrete voxels were associated with two parameters, concrete stress and displacement.

3D-CNN operation with U-Net architecture. U-Net is commonly used as a standard CNN architecture applied for image segmentation tasks [22], it can be also suited for regression tasks [23].

It should be noted that the existing literature lacks information on the use of either convolutional or generative adversarial neural networks for predicting the shrinkage of SSC slabs on a base.

The classification of neural networks developed to date is quite extensive. A perceptron with a single hidden layer is a universal approximator, i.e., it is capable of approximating any continuous function with any accuracy if a continuous, monotonically increasing, bounded function is used as the activation function of the neural elements of the hidden layer [24].

Convolutional neural networks, which are a further development of the multi-layer perceptron, are widely used for image processing and, unlike the multilayer perceptron, allow to consider the image topology and to preserve predictive properties during shifts, scaling, and other distortions of the input image. Since stresses, deformations or displacements are data structures, they have a similarity to an image when inferred in a certain way. The convolutional and generative-adversarial neural networks used in this paper to achieve the goal.

The encoder works layer by layer: at each step, it "compresses" the two-dimensional matrix using convolution. This compression reduces the number of points in the plate grid by half. However, it doesn't lose important information; on the contrary, it concentrates it, increasing the number of elements that describe key stress features at each grid point. The process continues until all the information is

collected into a single final vector (visualized as a $1 \times 1 \times 4$ layer of feature maps in Figure 2). Then the reverse transformation to the previous size is started.

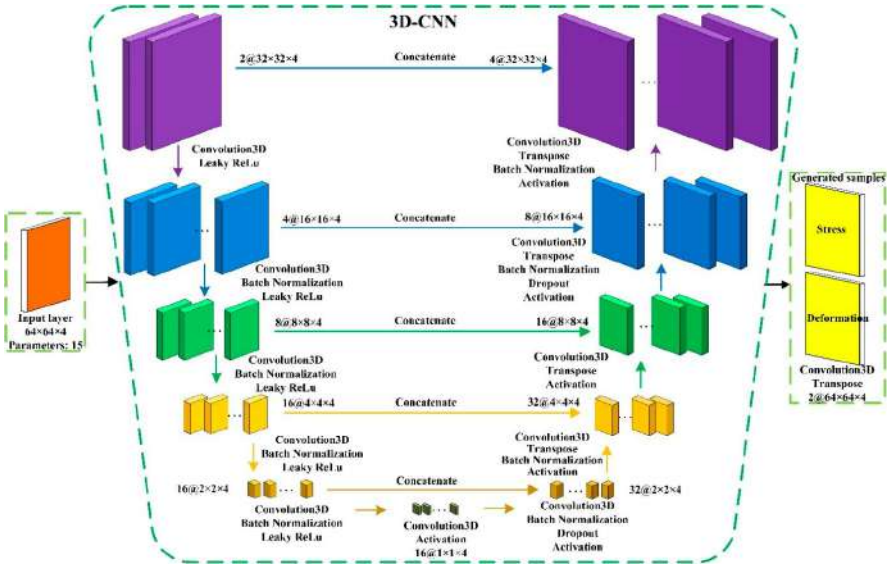


Figure 2 – 3D-CNN convolutional neural network created by the U-Net "Voxel-to-Voxel" architecture using four voxels at the lowest resolution. A feature map with multi-channels is connected to each corresponding parallelepiped. The parameter signature of the map contains the information of the number of channels: it is indicated by the first digit (before @). The map parameter caption shows the map dimensions that are indicated behind the @ sign

Use of DCGAN (Deep Convolutional Generative Adversarial Nets). Generative-adversarial networks are a machine learning algorithm, part of the family of generative models and built on a two neural networks combination: G – a generative model, that builds the data distribution approximation; , D – a discriminative model, that makes an assessment of the probability that the obtained from training data sample is not generated by model G (Figure 3). The essence of the model G training is to maximize the discriminator D error probability. Such networks were first presented in [25].

DCGAN is a modification of the GAN algorithm, which is based on a convolutional neural network. The task of finding a convenient feature representation on large volumes of unlabeled data is one of the most active areas of research. As our own research and studies [26] have shown, using CNN directly did not give good results, so the authors [25], proposed to use this modification of GAN, with restrictions imposed on the convolution layers:

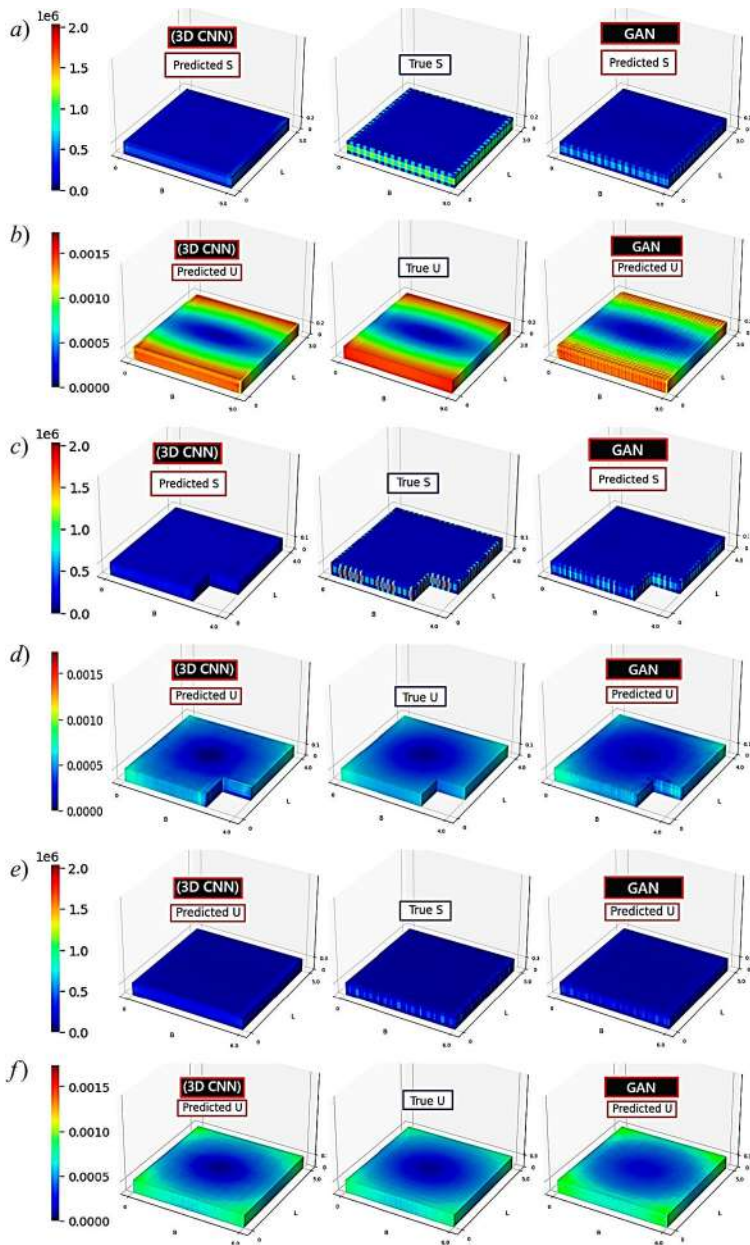


Figure 4 – Shrinkage: *a, c, e* – stresses; *b, d, f* – displacements

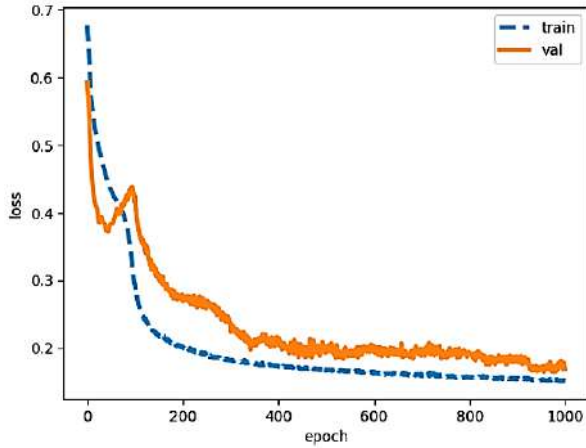


Figure 5 – CNN loss plots

Table 1 – Statistical parameters indicating the accuracy degree for the developed models

<i>No.</i>	<i>SSC</i>	<i>Models</i>	<i>RMSE</i>	<i>MAE</i>	<i>r</i>	<i>R²</i>	<i>b</i>
Slab 1 (a, b)	Displacement	CNN	0.0224	0.0123	0.9948	0.9895	1.0016
		DCGAN	0.0507	0.0432	0.9925	0.9466	0.9180
	Stress	CNN	0.0715	0.0253	0.8378	0.4089	0.6215
		DCGAN	0.0649	0.0284	0.9407	0.5133	0.5952
Slab 2 (c, d)	Displacement	CNN	0.0162	0.0112	0.9879	0.9700	0.9718
		DCGAN	0.0262	0.0220	0.9824	0.9219	0.9090
	Stress	CNN	0.0732	0.0217	0.4896	0.2064	0.5835
		DCGAN	0.0531	0.0173	0.8317	0.5826	0.6776
Slab 3 (e, f)	Displacement	CNN	0.0252	0.0208	0.9947	0.9307	1.0820
		DCGAN	0.0510	0.0457	0.9814	0.7154	1.1688
	Stress	CNN	0.0172	0.0099	0.8026	0.6164	0.9994
		DCGAN	0.0148	0.0100	0.8998	0.7165	1.0927

Statistical analysis of the prediction of displacement reliability using CNN and DCGAN shows that the DCGAN model has a slightly higher predictive ability. The slight difference in favor of the prediction ability of the CNN model only concerns displacements (the correlation coefficient for in slabs 1, 2, 3, is higher by: 0.2 %, 0.6 %, 1.4 % respectively). The stresses are better predicted by the DCGAN. For example, for stresses, Pearson's coefficient is higher for slabs 1, 2, 3, by: 10.9 %, 41.1 %, 10.8 %, respectively, than CNN. The coefficient of determination is also higher for the DCGAN model. If we consider the difference in the coefficient values of the same model, between displacements and stresses, the stresses are predicted slightly worse in each case. At the same time, it should be noted that the Pearson coefficient (DCGAN model) on average (for all slabs) gives a value for stresses – 0.891 (CNN – 0.610), for displacements – 0.993 (CNN – 0.992). The mean coefficient of determination (DCGAN model) for stresses is

0.604 (CNN – 0.410) and for displacements 0.861 (CNN – 0.964). Considering the training sample small number, the obtained results demonstrate the predictive ability of the DCGAN model as very high for displacements and average for stresses (it is accepted to consider as good computational models with determination coefficient higher than 0.8 and correlation coefficient higher than 0.9). One of the reasons for the low predictive ability for stresses may be that when modelling reinforced slabs on ABAQUS, due to the difference in the coefficient of thermal expansion and the peculiarities of taking into account the conditions of meshing of reinforcement and concrete, local areas with higher stresses appeared at the end sections of the slabs. In neural network simulation, the stresses in neighboring points were averaged out.

Conclusions. According to numerous scientific publications, the use of neural networks to model the behavior of engineering structures demonstrates significant simplification compared to classical mathematical models.

Neural networks can serve as an alternative to both mathematical models and experimental studies in the initial stages of design. They enable rapid prediction of the response of reinforced concrete slabs under loads, determining both the magnitude of forced displacements and the levels of stress and deflection. Thus, neural networks are capable of modeling system behavior with optimized design costs, providing rapid and appropriate solutions in the face of high complexity, uncertainty, and unique situations.

Overall, despite the presence of some statistical indicators with suboptimal values, the predictive ability of a model based on a generative adversarial neural network with voxel-based object interpretation can be assessed as quite high. The authors believe that the reliability of the obtained results can be improved by re-training the neural network on a sample of more samples.

REFERENCES

1 **Желткович, А. Е.** Расчет вынужденных перемещений и напряжений от усадки в монолитных бетонных плитах, взаимодействующих с основанием / А. Е. Желткович, В. В. Тур // *Строительная наука и техника*. – 2011. – № 1. – С. 98–107.

2 СН 5.09.01-2020. Полы. Строительные нормы. – Минск : М-во архитектуры и стр-ва Респ. Беларусь, 2020. – 17 с.

3 EN 1992-1-1:2024 Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, bridges and civil engineering structures. – Brussels : European Committee for Standardization, 2023. – 402 p.

4 **Bamiyo, S. P.** Prediction of Load deflection Behaviour of two way Rc Slab using Neural Network Approach / S. P. Bamiyo, O. A. Uche, M. Adamu // *International Journal of Optimization in Civil Engineering*. – 2017. – Vol. 7 (4). – P. 633–644.

5 **Zadeh, L. A.** Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing / L. A. Zadeh // *Communications of the ACM*. – 1994. – Vol. 37, is. 3. – P. 77–84.

6 **Ahmad, A.** Neural network-based prediction: the case of reinforced concrete members under simple and complex loading / A. Ahmad, N. D. Lagaros, D. M. Cotsovos // *Applied Sciences*. – 2021. – Vol. 11. – Article 4975.

7 **Papadrakakis, M.** Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation / M. Papadrakakis, N. D. Lagaros // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2002. – Vol. 191, is. 32.– P. 3491–3507.

8 **Lagaros, N. D.** Learning improvement of neural networks used in structural optimization / N. D. Lagaros, M. Papadrakakis // *Advances in Engineering Software*. – 2004. – Vol. 35, is. 1. – P. 9–25.

9 **Lagaros, N. D.** An adaptive neural network strategy for improving the computational performance of evolutionary structural optimization / N. D. Lagaros, D. C. Charpis, M. Papadrakakis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2005. – Vol. 194, is. 30–33. – P. 3374–3393.

10 **Lagaros, N. D.** Multi-objective design optimization using cascade evolutionary computations / N. D. Lagaros, V. Plevris, M. Papadrakakis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2005. – Vol. 194, is. 30–33. – P. 3496–3515.

11 **Lagaros, N. D.** Fragility assessment of steel frames using neural networks / N. D. Lagaros, M. Fragiadakis // *Earthquake Spectra*. – 2007. – Vol. 23, is. 4. – P. 735–752.

12 **Ahmad, A.** Prediction of Properties of FRP-Confined Concrete Cylinders Based on Artificial Neural Networks / A. Ahmad, V. Plevris, Q. U. Z. Khan // *Crystals*. – 2020. – Vol. 10, is. 9. – Article 811. – 22 p.

13 Evaluating the impacts of pumping on aquifer depletion in arid regions using MODFLOW, ANFIS and ANN / M. R. Almuhaylan, A. R. Ghumman, I. S. Al-Salamah [et al.] // *Water*. – 2020. – Vol. 12, is. 8. – Article 2297. – 18 p.

14 Relating groundwater levels with meteorological parameters using ANN technique / M. Iqbal, U. A. Naem, A. Ahmad [et al.] // *Measurement*. – 2020. – Vol. 166. – Article 108163. – 19 p.

15 **Raza, A.** Prediction of axial compressive strength for FRP-confined concrete compression members / A. Raza, Q. U. Z. Khan, A. Ahmad // *KSCE Journal of Civil Engineering*. – 2020. – Vol. 24, is. 7. – P. 2099–2109.

16 The role of damage extent in the estimation of direct economic losses of existing RC buildings / V. Manfredi, A. Masi, G. Nicodemo [et al.] // *Atti del XVIII Convegno ANIDIS L'ingegneria Sismica in Italia*. – Pisa : Pisa University Press, 2019. – P. 36–45.

17 Development of Integrated Techniques to Improve Seismic Performance and Energy Efficiency of Buildings: Preliminary Results of the Experimental Campaign on RC Portal Frames / D. Nigro, A. Digrisolo, G. Ventura [et al.] // *Atti del XVIII Convegno ANIDIS L'ingegneria Sismica in Italia*. – Pisa : Pisa University Press, 2019. – P. 128–137.

18 Structural health monitoring based on the hybrid ant colony algorithm by using Hooke – Jeeves pattern search / A. Shakya, M. Mishra, D. Maity, G. Santarsiero // *SN Applied Sciences*. – 2019. – Vol. 1. – Article 799. – 14 p.

19 **Garrett, J. H.** Neural Networks and their Applicability within Civil Engineering / J. H. Garrett // *Proceedings of the 8th Conference on Computing in Civil Engineering*. – New York : ASCE, 1992. – P. 1155–1162.

20 2D convolutional neural network in the design of monolithic self-stressed slabs on base / A. E. Zheltkovich, K. G. Parchotz, V. V. Molosh [et al.] // *Vestnik of Brest State Technical University*. – 2023. – Vol. 3, is. 132. – P. 54–60.

21 Voxel Hashing : Volumetric Representation. – URL: <https://leechangyo.github.io/visual%20slam/2020/06/23/28.Visual-Slam/> (date of access: 23.10.2024).

22 **Ronneberger, O.** U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation / O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox // International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. – 2015. – Vol. 9351. – P. 234–241.

23 Image-to-Image Translation with Conditional Adversarial Networks / P. Isola, J. Y. Zhu, T. Zhou, A. A. Efros // Proceedings of the 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Honolulu, HI, USA. – IEEE, 2017. – P. 5967–5976.

24 **Головко, В. А.** Нейросетевые технологии обработки данных : учеб. пособие / В. А. Головко, В. В. Краснопрошин. – Минск : БГУ, 2017. – 263 с.

25 Object recognition with gradient-based learning / Y. LeCun, P. Haffner, L. Bottou, Y. Bengio // Shape, Contour and Grouping in Computer Vision. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1999. – Vol. 1681. – P. 319–345.

26 Gradient-based learning applied to document recognition / Y. LeCun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner // Proceedings of the IEEE. – 1998. – Vol. 86, is. 11. – P. 2278–2324.

27 Еврокод. Основы проектирования строительных конструкций: ТКП EN 1990-2011 (02250): [утв. М-вом архитектуры и стр-ва Респ. Беларусь 15.12.11: взамен ENV 1991-1:1994: введено 01.07.12]. – Изд. официальное. – Минск : Минстройархитектуры : Минсктиппроект, 2012. – 61 с.

*А. Е. ЖЕЛТКОВИЧ¹, В. В. МОЛОШ¹, А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК¹, Д. Е. МАРМЫШ²,
Е. ЛЬЮ³, Дж. ЯНГ³, Ю. РЕН^{4,5}, Н. МОУ^{1,6}, К. Г. ПАРХОЦ¹*

¹*Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь*

²*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

³*Даляньский политехнический университет, Далянь, Китай*

⁴*Наньчанский авиационный университет, Наньчан, Китай*

⁵*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь*

⁶*Шаньдунский технологический университет Хуаюй, Дэчжоу, Китай*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И УСАДОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МОНОЛИТНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТАХ НА СКОЛЬЗЯЩЕМ ОСНОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

В некоторых случаях на этапе проектирования требуются технологические проемы различной формы, а поверхность плиты может иметь сложную геометрическую форму. Определение напряженно-деформированного состояния в замкнутом виде в таких случаях весьма трудоемко или даже невозможно. В данной статье представлен альтернативный подход, основанный на использовании 3D сверточных нейронных сетей (CNN) с архитектурой U-Net и 3D глубоких сверточных генеративно-сопоставительных сетей (DC-GAN), который позволяет достаточно точно прогнозировать усадочные и температурные напряжения и перемещения в железобетонных плитах на скользящем основании, причем более простым способом по сравнению с методом конечных элементов (МКЭ). В статье подчеркивается перспективность использования нейронных сетей в строительном проектировании.

Ключевые слова: температурные напряжения, усадочные напряжения, бетонные плиты, нейронные сети, глубокое обучение.

Получено 10.10.2025

УДК 531.15:621.825.6

А. С. ИВАНОВ, Д. П. РЕЙФШНЕЙДЕР, Е. В. ФАЛЬКОВА

Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия**АНАЛИЗ РАБОТЫ ШАРНИРОВ РАВНЫХ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ**

Рассматривается кинематика шарниров равных угловых скоростей (ШРУС). Анализируются особенности синхронизации углов поворота, аксиальные перемещения валов, а также влияние смещения крестовин и геометрических параметров шарнира на неравномерность передачи момента. На основе расчетных зависимостей показано, что оптимальный угол синхронного вращения $32\text{--}35^\circ$, а смещение центра шарнира позволяет минимизировать динамические нагрузки и колебания. Результаты исследования важны для проектирования надежных приводных систем с учетом компенсации осевых смещений и вибраций в условиях переменных крутящих нагрузок.

Ключевые слова: ШРУС, кинематическая схема, аксиальное перемещение, синхронизация вращения.

Шарнир равных угловых скоростей (ШРУС), или, как его иногда называют, сдвоенный шарнир, так же как и карданный шарнир, эквивалентен кинематическим парам второго рода (рисунок 1) [1, 2]. ШРУСы чаще всего применяются для привода рулевых жестких мостов в полноприводных автомобилях [3–6].

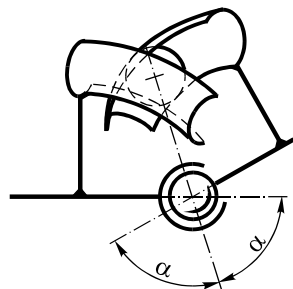


Рисунок 1 – Шарнир равных угловых скоростей

Аналізу функціонування ШРУСов посвящено значительное число публикаций [7–10]. В данной работе представлены некоторые результаты исследования их кинематики.

Рассмотрим особенности работы данного шарнирного узла. На рисунке 2 представлен жестко закрепленный ведомый вал 1 и подвижно закрепленный ведущий вал 2. A и B – подшипники шарниров, O – ось поворотной цапфы.

Если шарнир установлен таким образом, что точка вращения O поворотной цапфы совпадает с серединой M выпрямленного шарнира, то при повороте вала 1 на угол β углы поворота β_1 и β_2 оказываются неравными, а передача является неравномерной, как это следует из рисунка 3.

Посредством перемещения центра M выпрямленного шарнира в направлении неподвижной опоры можно получить такой размер u , что при определенном угле поворота будет наступать синхронное вращение (рисунок 4). Наилучшим является угол синхронного вращения $\beta_0 = 32\text{...}35^\circ$, т. к. при нем во всей области угла поворота достигается наименьшая неравномерность (см. рисунок 3) и, соответственно, снижение динамических нагрузок.

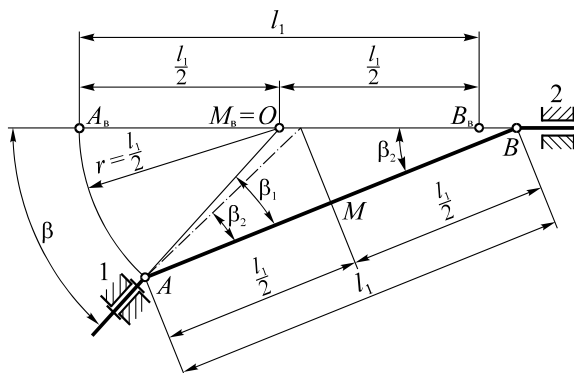


Рисунок 2 – Кинематическая схема ШРУСа при совпадении середины M звена AB с осью O вращения поворотной цапфы

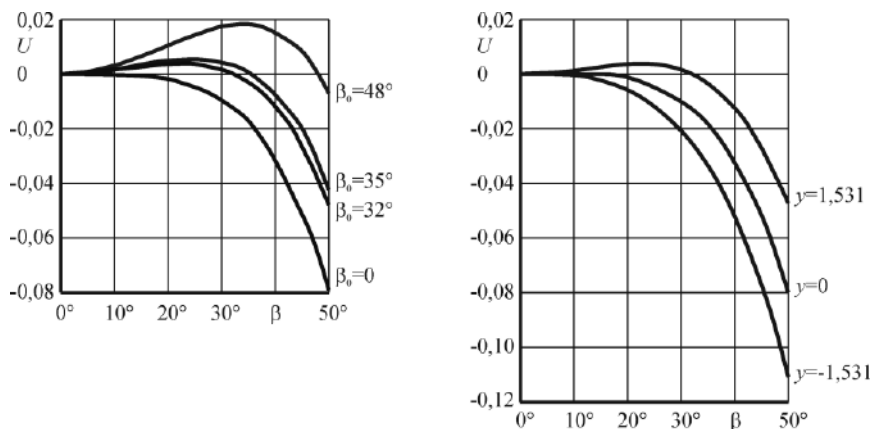


Рисунок 3 – Влияние углов поворота и смещения y на неравномерность передачи U

Смещение шарнира y , при котором при угле β_0 достигается полная синхронизация, определяется по формуле

$$y = \frac{l_1}{2} \left(\left(\cos \frac{\beta_0}{2} \right)^{-1} - 1 \right).$$

При повороте шарнира происходит аксиальное перемещение ведущего вала 2, который должен быть закреплен подвижно. Максимальная величина перемещения

$$x = l_1 \left(\frac{\cos(\beta/2 - \arcsin(\sin \beta / (2 \cos(\beta_0/2)))}{\cos(\beta/2)} - 1 \right).$$

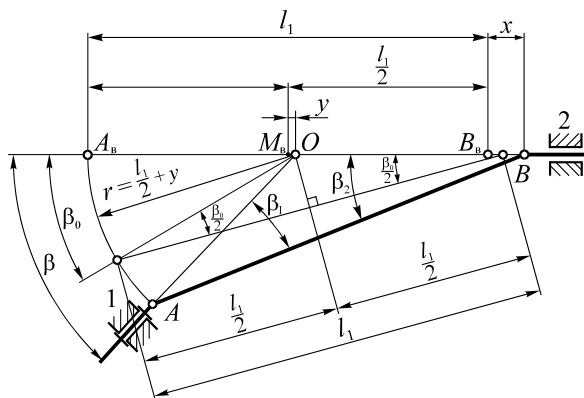


Рисунок 4 – Кинематическая схема ШРУСа при смещении середины M звена AB

Также в ШРУСах используют крестовины со смещенной осью, в которых допускается изменение длины звена AB (рисунок 5).

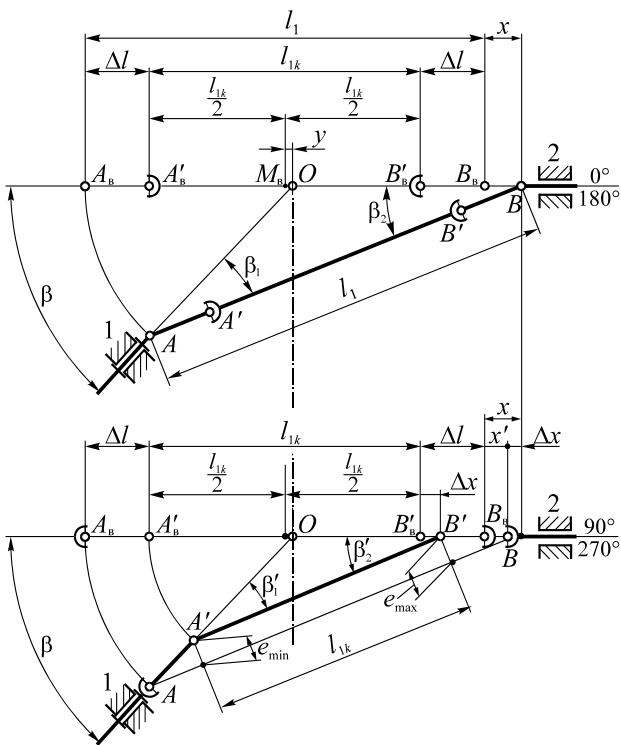


Рисунок 5 – Кинематическая схема ШРУСа с крестовиной со смещенной осью

Сгибание звена AB приводит к дополнительному аксиальному смещению, которое повторяется дважды за один оборот вала. В положениях 0 и 180° аксиальные перемещения Δl (AA' и BB') непосредственно суммируются с промежутком между шарнирами l_{1k} ($A'B'$). В положениях 90 и 270° результат сложения тех же перемещений зависит от углов поворота β'_1 и β'_2 (см. рисунок 5). Разница указанных сумм представляет собой перемещение, которое дважды за один оборот совершает ведущий вал ШРУСа:

$$\Delta x = x - x',$$

где x и x' – перемещения ведущего вала, соответственно без крестовины со смещенной осью в положениях 0 и 180° и с крестовиной со смещенной осью в положениях 90 и 270° , отличающихся уменьшенным зазором;

$$x' = \left[\frac{\left(\cos \left(\frac{\beta}{2} - \arcsin \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{l_1}{l_{1k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\cos \frac{\beta_0}{2} \right)^{-1} - 1 \right) \right) \cdot \sin \beta \right) \right) \right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2} \right)} - 1 \right] l_{1k}.$$

В случае $\Delta l = 0,1l_1$ и угла синхронного вращения 32° получаем

$$l_{1k} = l_1 - 2\Delta l; \quad x'_{40^\circ} = 0,0756l_{1k}.$$

Соответственно изменение хода

$$\Delta x_{40^\circ} = 0,0641l_1 - 0,0513l_{1k}; \quad \Delta x_{48^\circ} = 0,0944l_1 - 0,0756l_{1k}.$$

При расчете места для головки шарнира необходимо принимать во внимание, что центр головки также перемещается дважды за один оборот, причем его перемещение на ведущем вале больше, чем на ведомом, и составляет

$$e_{\max} = (\Delta l + \Delta x) \cdot \sin \beta'_2,$$

где угол поворота ведущего вала рассчитывается по формуле

$$\beta'_2 = \arcsin \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{l_1}{l_{1k}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos(\beta_0/2)} - 1 \right) \right) \sin \beta \right).$$

Перемещение со стороны ведомого вала

$$e_{\min} = \Delta l \sin \beta'_1,$$

а угол поворота ведомого вала рассчитывается как разность углов β и β'_1 .

Представленные результаты исследования позволяют осуществлять компенсацию осевых смещений и вибраций, вызванных действием переменных крутящих нагрузок, и обеспечить проектирование надежных приводных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Артоболевский, И. И.** Теория машин и механизмов : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1975. – 640 с.
- 2 **Тарасов, В. К.** Шарнир равных угловых скоростей / В. К. Тарасов, Ю. П. Смирнов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2011. – Вып. 5. – С. 129–136.
- 3 Design of constant velocity joint puller for passenger vehicles and light trucks / B. Derbiszewski, M. Wozniak, S. Zakrzewski [et al.] // Design of constant velocity joint puller for passenger vehicles and light trucks. – Technologia i Jakość Wytrobów. – 2022. – R. 67. – S. 26–38.
- 4 **Прокопьев, М. В.** О влиянии усилия осевой компенсации в шарнирах равных угловых скоростей на вибронгруженность силового агрегата переднеприводного автомобиля / М. В. Прокопьев, Е. Ю. Наймушин // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. – 2009. – № 2 (8). – С. 26–31.
- 5 **Song, Y.** Contact stress and cage strength analysis of constant velocity joint for off-road vehicle under bad working conditions / Y. Song, Y. Ma // Journal of Mechanical Strength. – 2022. – Vol. 44, is. 1. – P. 162–168.
- 6 Analysis of a cross groove constant velocity joint mechanism designed for high performance racing conditions / M. Simpson, N. Dolatabadi, N. Morris [et al.] // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics. – 2023. – Vol. 237, is. 1. – P. 16–33.
- 7 Design of a Flexure-based Constant-Velocity Joint Optimized for High Axial Loads / F. Cosandier, M. Nijenhuis, J. Huser, S. Henein // 21st European Space Mechanisms and Tribology Symposium proceedings. – Lausanne, 2025. – Article 17. – 10 p.
- 8 **Cardozo, W. S.** A compact formulation for constant velocity joint kinematics / W. S. Cardozo, H. I. Weber // Mechanism and Machine Theory. – 2018. – Vol. 121. – P. 1–14.
- 9 Thrust force analysis of tripod constant velocity joint using multibody model / H. Sugiura, T. Matsunaga, Y. Mizutani [et al.] // Journal of System Design and Dynamics. – 2009. – Vol. 3, is. 6. – P. 975–985.
- 10 **Innocenti, C.** The instantaneous transmission ratio of a driveshaft composed of a tripod joint and a fixed constant velocity joint / C. Innocenti // Mechanism and Machine Theory. – 2023. – Vol. 189. – Article 105430. – 14 p.

A. S. IVANOV, D. P. REIFSCHNEIDER, E. V. FALKOVA
Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

ANALYSIS OF A CONSTANT VELOCITY JOINT OPERATION

The kinematics of constant velocity joints (CV joints) is considered. The synchronization of rotation angles, axial shaft displacements, and the influence of crosspiece offsets and joint geometric parameters on torque transfer unevenness are analyzed. Based on calculated dependencies, it is shown that the optimal synchronous rotation angle (32–35°) and offset of the joint center minimize dynamic loads and vibrations. The results of this study are important for the design of reliable drive systems that compensate for axial displacements and vibrations under variable angular loads.

Keywords: CV joint, kinematic diagram, axial displacement, rotation synchronization.

Получено 14.05.2025

УДК 539.31:531.45

Е. В. КОДНЯНКО

ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ КАЧЕНИЯ ЖЕСТКОГО КОЛЕСА С ГИПЕРУПРУГИМ ОБОДОМ

Разработана методика расчетного определения параметров контактного взаимодействия жесткого цилиндра, имеющего тонкий гиперупругий обод, с опорной поверхностью в процессе установившегося качения цилиндра. Методика основана на использовании упрощенной модели винклера основания. Результаты использования разработанной методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными для качения цилиндра с линейно вязкоупругим ободом.

Ключевые слова: установившееся качение, контактные напряжения, модель Винклера основания, упругий потенциал.

Введение. Полимерные материалы в настоящее время широко используются при изготовлении покрытий, обкладок и поверхностных слоев, предназначенных для снижения износа металлических деталей при контактном взаимодействии. Выбор оптимального состава и толщины подобных покрытий требует наличия методики расчетного прогнозирования их силовой нагруженности в процессе эксплуатации. Решению контактных задач для тел с покрытиями посвящено множество известных научных работ [1–3].

Широко распространенное в настоящее время численное, в частности, конечно-элементное моделирование [4] позволяет производить расчеты без существенного упрощения геометрии контактирующих тел с учетом особенностей деформационного поведения используемых материалов. Однако реализация в рамках данного подхода многопараметрического анализа рассматриваемой контактной пары связана со значительными временными затратами. Кроме того, для тонких покрытий, толщина которых намного меньше характерных размеров основной детали и не превышает характерного размера области контакта, возникает дополнительная задача обеспечения сходимости численного решения контактной задачи путем оптимизации распределения конечных элементов по размерам и формам [5].

Классический вариант методики аналитического решения контактных задач для тел с покрытиями [2] подразумевает использование интегрального преобразования Фурье и решение систем интегральных уравнений. Указанная сложность математического аппарата кратно возрастает при необходимости учета частичного проскальзывания в области контакта. Кроме того, при использовании указанной методики затруднен учет нелинейности процесса деформирования полимерного материала.

Вследствие отмеченных недостатков классического варианта при аналитическом решении рассматриваемых контактных задач часто используются упрощенные модели деформируемого основания [6]. В частности, применение модели винклера основания для относительно тонких поверхностных слоев позволяет без существенного усложнения используемых математических соотношений учесть вязкость материала слоя [7], а также наличие в области контакта зон сцепления и проскальзывания [8]. Получаемые при этом расчетные оценки параметров контакта с приемлемой точностью согласуются с результатами использования математически более строгой и сложной методики, основанной на асимптотическом приближении точного решения задачи теории упругости для тонкой полосы [9]. Также модель винклера основания позволяет описать пластическое деформирование [10] и частичный износ [11, 12] покрытия под действием контактных напряжений.

Однако до настоящего времени аналитические методы решения контактных задач не были использованы для описания качения колес с учетом характерной для большинства полимерных материалов геометрической нелинейности процесса деформирования [13]. Кроме того, при анализе силовой нагруженности конструкций, содержащих полимерные элементы, возникает необходимость учета не только больших деформаций этих элементов, но и вязкости образующего их материала. Наиболее значимо влияние данного свойства при циклическом деформировании полимерного материала.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является разработка упрощенной основанной на модели основания Винклера методики расчетного определения параметров установившегося качения колеса, которая позволила бы учесть большие деформации и вязкость материала тонкого деформируемого обода.

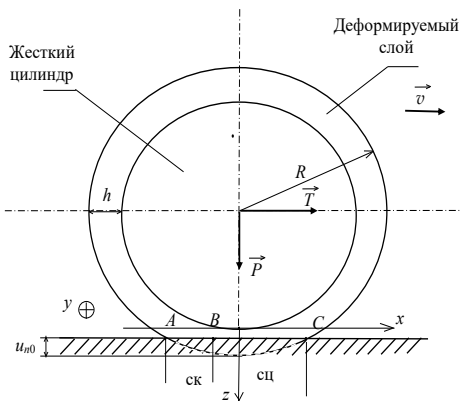


Рисунок 1 – Структурная модель опоры качения

Решение контактной задачи.

Упрощенная структурная модель роликовой опоры, содержащей полимерный промежуточный слой, представлена на рисунке 1. Она включает абсолютно жесткий цилиндр с образующей длиной L , по боковой грани которого с ним адгезионно связан деформируемый слой толщины h . Общий радиус составного цилиндра R . Деформируемый слой находится в контактом взаимодействии с горизонтальной недеформируемой шероховатой поверхностью. Коэффициент трения с данной по-

верхностью – f . Слой образован изотропным гиперупругим сжимаемым материалом. На составной цилиндр действуют вертикальная сила P , направленная к опорной поверхности, и горизонтальная сила T (см. рисунок 1).

Для деформируемого слоя будем использовать модель винклера основания, в которой слой представляет собой систему независимо деформируемых элементарных стержней высотой h , ориентированных вдоль оси z (см. рисунок 1). Для каждого из этих стержней компоненты F_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензора градиента деформации \mathbf{F} не зависят от координат (допущение модели Винклера) и задаются выражениями вида [14]

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j}.$$

Здесь x_i, X_i – декартовы координаты точки стержня в актуальной (текущей) и отсчетной (исходной) конфигурации соответственно; u_i – компоненты вектора упругого смещения данной точки.

Условия однородности градиента деформации и адгезионной связи стержня с недеформируемым цилиндром позволяют представить тензор \mathbf{F} в виде

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{u_\tau}{h} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{u_n}{h} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Здесь u_n, u_τ – вертикальные и горизонтальные смещения точек деформируемого слоя, находящихся в области контакта, относительно соответствующих (с той же координатой x) точек внутренней поверхности слоя соответственно.

В выражении (1) учтено, что при контакте составного цилиндра с основанием элементарные стержни модели винклера основания сжимаются (смещение u_n положительно). В рамках настоящей работы в качестве меры деформации гиперупругого материала будем использовать правый тензор деформаций Коши – Грина [14]. Данный тензор задается соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (2)$$

Упругий потенциал (запасенная энергия деформации) изотропного гиперупругого материала – функция инварианта тензора деформаций I_1, I_2, I_3

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], \quad I_3 = |\mathbf{C}|. \quad (3)$$

Здесь функция $\text{tr}(\mathbf{C})$ – след матрицы \mathbf{C} (сумма диагональных элементов); $|\mathbf{C}|$ – определитель матрицы \mathbf{C} .

В большинстве случаев [15] вместо третьего инварианта используют относительное изменение объема J :

$$J = \sqrt{I_3} = |\mathbf{F}|. \quad (4)$$

В качестве меры напряжения используем второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа

$$\mathbf{S}^y = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} \mathbf{I} + 4 \frac{\partial w}{\partial I_2} \mathbf{C} + J \frac{\partial w}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}. \quad (5)$$

Верхний индекс «у» означает, что соответствующая величина определена без учета вязкости материала. Классический вариант учета данного явления для гиперупругих материалов [16] подразумевает использование одного ядра $R(t)$ релаксации для всех компонент тензора напряжений. При этом второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, определенный для вязкоупругого материала, будет связан с тензором \mathbf{S}^0 соотношением

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^y - \int_0^t \mathbf{S}^y(\zeta) R(t - \zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Не снижая общности дальнейших выкладок в качестве функции $w(I_1, I_2, J)$ будем использовать неогуковский потенциал в форме [14]

$$w = \frac{1}{2} G (J^{-2/3} I_1 - 3) + \frac{1}{2} K (J - 1)^2. \quad (7)$$

Здесь G, K – модуль сдвига и объемный модуль материала обода, характеризующие упругость материала при малых деформациях без учета вязкости:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

где E, ν – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала.

Используя соотношения (1)–(7), получим выражения для нормального и сдвигового контактных давлений, определенных без учета вязкости материала как функции смещений u_n, u_τ :

$$\begin{aligned} p^y(u_n, u_\tau) &= -G \left(1 - \frac{u_n}{h}\right)^{-8/3} \frac{2u_n^2 - u_\tau^2 - 4u_n h}{3h^2} + K \frac{u_n}{h - u_n}; \\ \tau^y(u_n, u_\tau) &= G \left(1 - \frac{u_n}{h}\right)^{-8/3} \frac{u_\tau}{h} \left(1 + \frac{u_n^2 + u_\tau^2 - 2u_n h}{3h^2}\right) + K \frac{u_n u_\tau}{h(h - u_n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение контактной задачи аналогично изложенному в работе [9]. Нормальное относительное смещение u_n точек внешней поверхности деформируемого обода, находящихся в области контакта, зависит от координаты x :

$$u_n = u_{n0} - \frac{x^2}{2R}, \quad (9)$$

где u_{n0} – максимальное нормальное относительное смещение, совпадающее с вертикальным смещением центра составного цилиндра.

При стационарном качении составного цилиндра в области контакта выделяются зоны сцепления (сц) и проскальзывания (ск), показанные на рисунке 1. В зоне сцепления должно выполняться условие [9]

$$\frac{du_{\tau}^{\text{сц}}}{dx} = \text{const}.$$

Следовательно, для сдвигового относительного смещения можно записать

$$u_{\tau}^{\text{сц}} = u_{\tau 0} + \gamma x, \quad (10)$$

где $u_{\tau 0}$ – предварительное смещение; γ – коэффициент проскальзывания.

Нормальное и сдвиговое контактные напряжения в зоне сцепления можно представить как функции четырех переменных:

$$\begin{aligned} p^{\text{сц}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= p^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau 0} + \gamma x), \\ \tau^{\text{сц}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= \tau^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau 0} + \gamma x). \end{aligned} \quad (11)$$

В зоне проскальзывания нормальное и сдвиговое контактные напряжения связаны соотношением $\tau^{\text{ск}y} = -fp^{\text{ск}y}$.

Данное равенство будем рассматривать как нелинейное уравнение для определения сдвигового относительного смещения в зоне проскальзывания, которое будет зависеть от смещения u_{n0} и координаты x :

$$\tau^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}) = -fp^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}). \quad (12)$$

Следовательно, для зоны проскальзывания контактные напряжения являются функциями двух переменных:

$$\begin{aligned} p^{\text{ск}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= p^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}(u_{n0}, x)); \\ \tau^{\text{ск}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= \tau^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}(u_{n0}, x)). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь функция $u_{\tau}^{\text{ск}}(u_{n0}, x)$ определяется путем решения уравнения (12).

Для учета вязкости материала обода при определении контактных напряжений будем использовать соотношение (6), где при условии установившегося качения интегрирование по времени можно заменить интегрированием по координате [9]:

$$d\zeta = \frac{-d\xi}{v}, \quad t - \zeta = \frac{\xi - x}{v}. \quad (14)$$

Здесь ζ, ξ – переменные интегрирования по времени и координате соответственно; v – скорость движения центра масс составного цилиндра.

С учетом замены (14), полагая, что моменту начала нагружения ($t = 0$) внешней поверхности обода соответствует точка C , для контактных напряжений в зонах сцепления и проскальзывания можно записать

$$\begin{aligned}
p^{\text{сц}}(x) &= p^{\text{сцв}}(x) - \int_x^{x_C} p^{\text{сцв}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}, \\
\tau^{\text{сц}}(x) &= \tau^{\text{сцв}}(x) - \int_x^{x_C} \tau^{\text{сцв}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}, \\
p^{\text{ск}}(x) &= p^{\text{скв}}(x) - \int_x^{x_C} p^{\text{скв}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}, \\
\tau^{\text{ск}}(x) &= \tau^{\text{скв}}(x) - \int_x^{x_C} \tau^{\text{скв}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для решения контактной задачи требуется определить максимальное нормальное смещение u_{n0} , предварительное смещение $u_{\tau 0}$ и коэффициент проскальзывания γ . Также необходимо знать координаты точек A , B и C (см. рисунок 1), которые определяют границы зон проскальзывания и сцепления. Кроме того, надо найти значение силы T , требуемое для обеспечения установившегося качения при заданной скорости движения центра составного цилиндра v . Для определения этих неизвестных используем следующие условия.

1 На внешних границах области контакта (точки A и C) нормальные и сдвиговые контактные напряжения отсутствуют:

$$p^{\text{сц}}(x_C) = 0; \quad \tau^{\text{сц}}(x_C) = 0; \quad p^{\text{ск}}(x_A) = 0. \tag{16}$$

2 В рамках модели винклерова основания напряжения p и τ являются однозначными функциями смещений u_n и u_τ . Следовательно, для обеспечения неразрывности смещений и напряжений на границе раздела зон сцепления и проскальзывания достаточно обеспечить неразрывность сдвигового смещения

$$u_\tau^{\text{ск}}(x_B) = u_{\tau 0} + \gamma x_B. \tag{17}$$

3 При стационарном качении выполняются условия равновесия составного цилиндра в проекциях на оси x и z

$$\begin{aligned}
\int_{x_A}^{x_B} p^{\text{ск}}(x) dx + \int_{x_B}^{x_C} p^{\text{сц}}(x) dx &= \frac{P}{L}; \quad \int_{x_A}^{x_B} \tau^{\text{ск}}(x) dx + \int_{x_B}^{x_C} \tau^{\text{сц}}(x) dx = -\frac{T}{L}; \\
\int_{x_A}^{x_B} p^{\text{ск}}(x) x dx + \int_{x_B}^{x_C} p^{\text{сц}}(x) x dx &= \frac{TR}{L}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, получена система семи уравнений для определения u_{n0} , $u_{\tau 0}$, γ , x_A , x_B , x_C , T .

Пример реализации математической модели. Рассмотрим качение стального ролика с полиуретановым ободом. Геометрические параметры ролика и характеристики материала обода выберем те же, что и в работе [9]: $L = 0,08$ м; $R = 0,125$ м; $P = 562$ кН; $v = 14,7$ м/с; $f = 0,4$; $E = 1,123$ МПа; $\nu = 0,4$. Ядро релаксации выбираем в виде экспоненциальной функции

$$R(t) = \frac{\delta}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right),$$

где $\delta = 0,8$; $\lambda = 1$ мс.

На рисунках 2 и 3 представлены расчетные эпюры нормального и сдвигового контактных напряжений. Можно отметить, что при учете больших деформаций полимерного обода ширина области контакта ролика с опорной поверхностью значительно меньше, чем при решении задачи в линейной постановке. Для гиперупругого материала обода максимальное значение нормального контактного напряжения существенно выше, а максимум сдвигового контактного напряжения несколько ниже (по модулю), чем для линейно вязкоупругого материала.

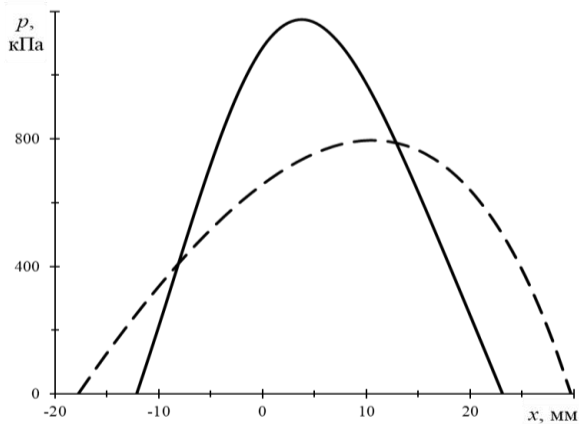


Рисунок 2 – Эпюры нормальных контактных напряжений: сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала; пунктирные – в линейно упругой постановке

Наибольший практический интерес представляет прогнозирование значения силы T , обеспечивающей установившееся качение при заданной скорости v . Эта сила представляет собой силу сопротивления движению ролика. Для оценки износа опорной поверхности требуется оценить максимальное значение интенсивности контактных напряжений [12]

$$s_u = \sqrt{p^2 + 3\tau^2}.$$

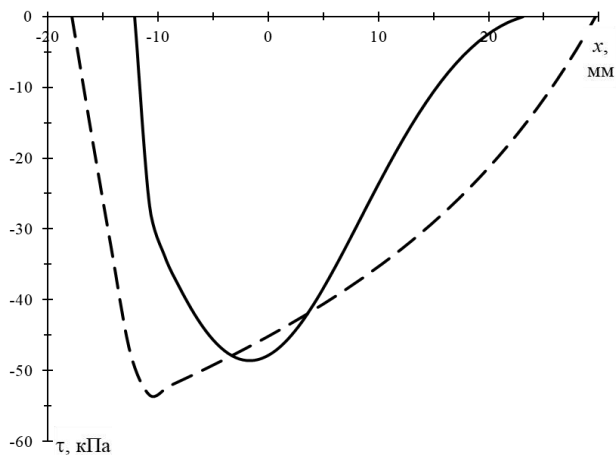


Рисунок 3 – Эпюры сдвиговых контактных напряжений:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

Зависимости силы T от скорости v (рисунок 4) характеризуются наличием максимума в области значений v между 5 и 10 м/с. При этом расчетное значение силы сопротивления качению при учете больших деформаций обода будет ниже, чем для линейно упругого материала.

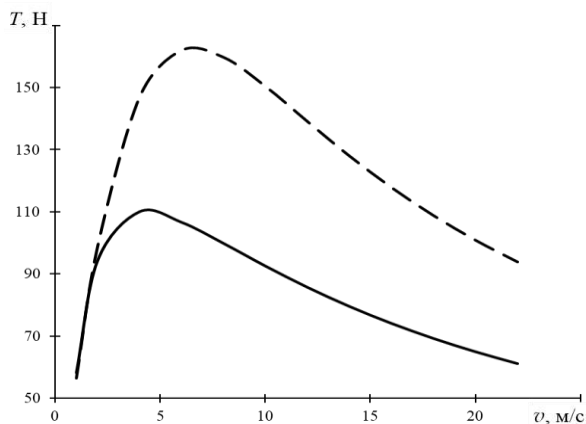


Рисунок 4 – Зависимости сдвиговой силы от скорости центра составного цилиндра:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

Также для гиперупругого материала обода несколько снижается значение скорости v^{\max} , соответствующее максимуму силы T . Максимальное значение интенсивности σ_u^{\max} в диапазоне значений скоростей выше v^{\max} практически не зависит от значения скорости (рисунок 5).

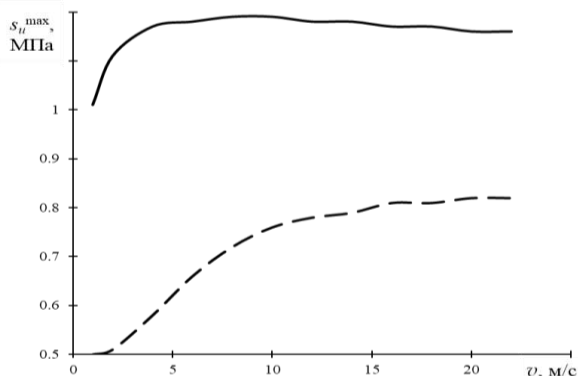


Рисунок 5 – Зависимости максимального значения интенсивности контактных напряжений от скорости центра составного цилиндра:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

На рисунках 6 и 7 представлены расчетные зависимости величин T и σ_u^{\max} от толщины деформируемой обкладки. С увеличением h значение силы сопротивления качению практически линейно возрастает, а максимальная интенсивность контактных напряжений убывает.

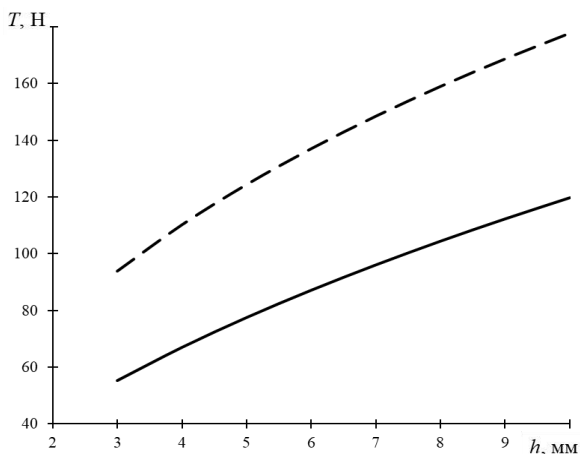


Рисунок 6 – Зависимости сдвиговой силы от толщины деформируемого обода:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

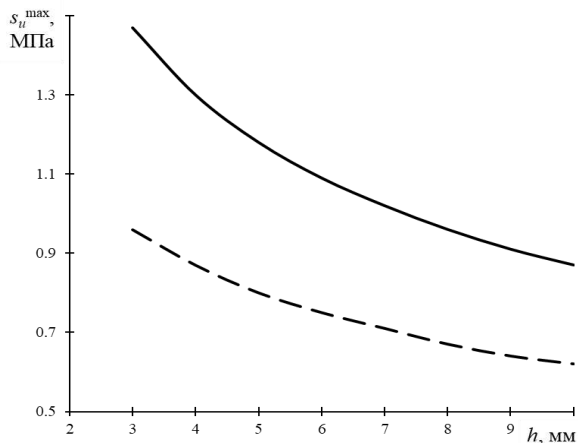


Рисунок 7 – Зависимости максимального значения интенсивности контактных напряжений от толщины деформируемого обода:
 сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
 пунктирные – в линейно упругой постановке

При использовании в качестве материала обода полимера с более выраженными реологическими свойствами (большим значением параметра ядра релаксации δ) значение силы сопротивления качению возрастает, а интенсивность контактных напряжений практически не изменяется (рисунки 8, 9).

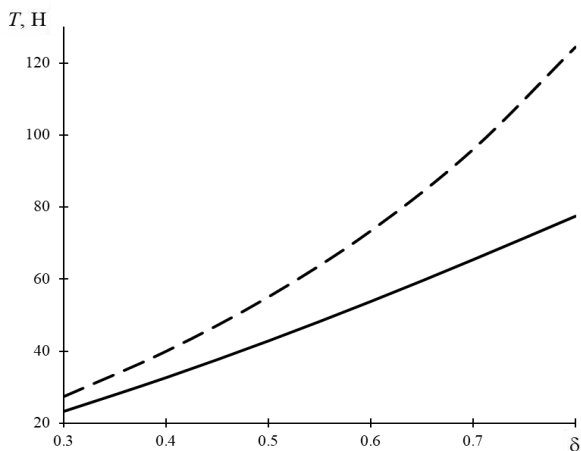


Рисунок 8 – Зависимости сдвиговой силы от безразмерной константы ядра релаксации:
 сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
 пунктирные – в линейно упругой постановке

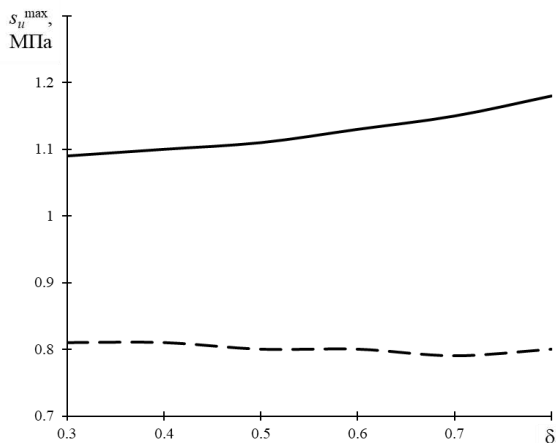


Рисунок 9 – Зависимости максимального значения интенсивности контактных напряжений от безразмерной константы ядра релаксации материала деформируемого обода: сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала; пунктирные – в линейно упругой постановке

Заключение. Показана возможность учета больших деформаций при описании установившегося качения жесткого колеса, имеющего тонкий вязкоупругий обод. В результате использования разработанной расчетной методики установлено, что пренебрежение гиперупругостью материала обода приводит к существенному завышению значений силы сопротивления качению и к заниженным оценкам максимальной интенсивности контактных напряжений. Характер зависимостей этих параметров контакта от скорости качения, толщины и вязкоупругих характеристик материала обода при учете больших деформаций не изменяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 285 с.
- 2 Fabrikant, V. I. Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space / V. I. Fabrikant // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2009. – Vol. 223, is. 11. – P. 2487–2499.
- 3 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 245 с.
- 4 Bahrami, M. R. ANSYS Tutorial: An Introduction to Elasticity and Contact Problems in Mechanical APDL 15.0 / M. R. Bahrami. – St. Petersburg : Peter the Great St. Petersburg Polytechnic university, 2018. – 69 p.

5 Numerical analysis of temperature distribution in sliding contacts of pin on disc model / A. K. Singh, V. Ranjan, R. Tyagi, B. N. Singh // *Vibroengineering Procedia*. – 2019. – Vol. 29. – P. 274–278.

6 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стерневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 324 с.

7 **Горячева, И. Г.** Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения и скольжения / И. Г. Горячева, А. П. Горячев, Ф. Садеги // *Прикладная математика и механика*. – 1995. – Т. 59, № 4. – С. 634–641.

8 **Коднянко, Е. В.** Использование модели Винклера для анализа качения колеса с деформируемым ободом / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 92–99.

9 **Коднянко, Е. В.** Асимптотическое решение контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра с вязкоупругим ободом / Е. В. Коднянко, С. В. Шилько, Д. А. Черноус // *Трение и износ*. – 2024. – Т. 45, № 5. – С. 375–383.

10 **Christoforou, A. P.** On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate / A. P. Christoforou // *Composite Structures*. – 1993. – Vol. 26, is. 1–2. – P. 77–82

11 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg, A. Laukkanen, A. Ghabchi [et al.] // *Tribology International*. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.

12 **Солдатенков, И. А.** Нелинейная износостойкая задача для основания Винклера (постоянная область контакта) / И. А. Солдатенков // *Трение и износ*. – 2006. – Т. 27, № 3. – С. 245–256.

13 **Райт, П.** Полиуретановые эластомеры / П. Райт, А. Камминг. – М. : Химия, 1973. – 304 с.

14 **Лурье, А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

15 **Шилько, С. В.** Особенности деформирования и описание упругих свойств наполненных эластомеров при растяжении / С. В. Шилько, Д. А. Черноус, С. Б. Анфиногенов // *Каучук и резина*. – 2008. – № 4. – С. 34–38.

16 Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов, В. П. Матвеев, Н. А. Труфанов, И. Н. Шардаков. – Екатеринбург : УрО РАН, 2003. – 246 с.

E. V. KADNIANKA

JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus

STEADY-STATE ROLLING ANALYSIS FOR A RIGID WHEEL WITH A HYPERELASTIC RIM

There is developed a method for calculating the parameters of the contact interaction of a rigid cylinder with a thin hyperelastic rim with a supporting surface at a steady-state rolling of the cylinder. The technique is based on the use of a simplified Winkler foundation model. The results the developed technique application are compared with the calculated estimates obtained for the rolling of the cylinder with a linearly viscoelastic rim.

Keywords: steady rolling, contact stresses, Winkler foundation model, elastic potential.

Получено 23.10.2025

УДК 621.837:531.8

А. В. КОТОВ^{1,2}, Д. Г. КРОЛЬ²

¹*ОАО «Сейсмотехника», Гомель, Беларусь*

²*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь*

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ДЕФОРМИРУЕМОГО МНОГОГРАННИКА К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПЛОСКОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

Представлены математическая постановка и результаты решения задачи оптимизационного кинематического синтеза плоского рычажного механизма, воспроизводящего заданную траекторию точки движения выходного звена, с помощью метода деформируемого многогранника. Дана качественная оценка эффективности использования данного метода при проведении многопараметрического оптимизационного кинематического синтеза механизмов с учетом и без учета возможности наложения дополнительных ограничений.

Ключевые слова: лямбда-механизм, оптимизационный синтез, деформируемый многогранник, симплекс, ограничения.

Введение. В современном машиностроении четырехзвенные рычажные механизмы нашли широкое применение благодаря своему уникальному сочетанию конструктивных и функциональных преимуществ. Данные механизмы при рациональном выборе их геометрических параметров, несмотря на минимальное количество звеньев, позволяют реализовать сложные траектории движения рабочих органов машин [1]. Однако в связи с возросшими требованиями к эффективности, точности и надежности рычажных механизмов традиционные методы проектирования, основанные на опыте и интуиции, уже с трудом позволяют достичь необходимых кинематических параметров. Поэтому оптимизационный кинематический синтез рычажных механизмов становится ключевым фактором, обеспечивающим конкурентоспособность разрабатываемой техники.

В учебной практике в основном уделяется внимание геометрическим методам синтеза рычажных механизмов, которые отличаются наглядностью, относительной простотой, но уступают в точности решения поставленной задачи [2]. В последнее время в связи с широким внедрением математических пакетов и языков программирования произошел заметный скачок в применении численных алгоритмов оптимизации для кинематического синтеза рычажных механизмов [3–7]. В результате геометрические методы синтеза постепенно уходят на второй план, уступая место более точным и эффективным машинным алгоритмам.

На сегодня не существует универсального численного алгоритма, способного эффективно решать весь спектр оптимизационных задач [8]. Применение популярных градиентных алгоритмов к задачам оптимизационного кинематического синтеза рычажных механизмов требует больших затрат вычислительных ресурсов и не всегда является эффективным. В то же время потенциал безградиентных алгоритмов для решения данного класса задач освещен в научной литературе недостаточно полно, что с учетом их высокой адаптации для программной реализации [9] требует проведения дополнительных исследований.

Цель исследования. Оценить возможность применения алгоритма многопараметрической безградиентной оптимизации на основе метода деформируемого многогранника для решения задачи оптимизационного кинематического синтеза плоского рычажного механизма. Дать качественную оценку использования данного метода при его реализации в математическом пакете PTC.MathCAD.

Методы исследований. Аналитическое описание кинематики рассматриваемого плоского рычажного механизма основано на векторном методе преобразования координат в неизменном базисе. При проведении оптимизационного кинематического синтеза механизма использовались численные методы оптимизации и математического программирования.

Постановка и решение задачи кинематического анализа. Среди четырехзвенных рычажных механизмов особое место занимает так называемый лямбда-механизм (лямбдаобразный механизм, или механизм Чебышева), кинематическая схема которого приведена на рисунке 1. При определенном сочетании длин звеньев лямбда-механизм преобразует вращательное движение ведущего звена в приближенное прямолинейное движение одной из своих точек на некотором

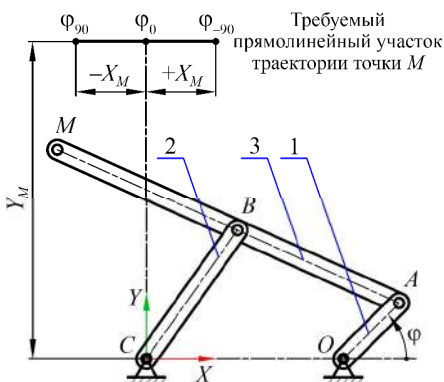


Рисунок 1 – Кинематическая схема лямбда-механизма:

1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло

ограниченном участке траектории ее движения [10]. Несмотря на то, что на сегодня наблюдается тенденция к постепенному вытеснению лямбда-механизмов более точными механическими системами, данные механизмы всё еще активно используются в машиностроении [11, 12], а оценка эффективности работы многих оптимизационных алгоритмов проверяется именно на данном механизме [13, 14].

Пусть для рассматриваемого лямбда-механизма (см. рисунок 1), имеющего произвольные геометрические параметры, требуется обеспечить максимально прямолинейный

участок траектории шатунной кривой точки M . Данная траектория должна быть расположена на некотором заданном расстоянии по вертикали Y_M и проходить через три точки, каждая из которых соответствует определенному углу φ поворота ведущего звена. Примем, что две крайние точки для $\varphi = 90^\circ$ и -90° расположены на расстоянии $\pm X_M$ по горизонтали относительно начала принятой системы координат, а ордината средней точки для $\varphi = 0$ совпадает с началом системы координат (см. рисунок 1).

В качестве оптимизируемых параметров будут выступать длины звеньев рычажного механизма, а также координата точки O по оси X , которые представим в виде следующего вектора оптимизируемых параметров:

$$\bar{p} = (p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4)^T \equiv (O_X \ L_{OA} \ L_{BC} \ L_{AB} \ L_{BM})^T. \quad (1)$$

Прежде чем приступить к решению задачи кинематического синтеза, необходимо описать кинематику движения всех характерных точек механизма с учетом вектора оптимизируемых параметров (1) и угла φ поворота ведущего звена относительно принятой системы координат (обобщенной координаты). В основу аналитического описания кинематики лямбда-механизма положен векторный метод преобразования координат в неизменном базисе, представленный в работах [15–17]. Используя приведенные в них аналитические зависимости, опишем кинематику рассматриваемого рычажного механизма:

$$\bar{C} = (0 \ 0 \ 0)^T; \quad \bar{O}(\bar{p}) = (p_0 \ 0 \ 0)^T; \quad (2)$$

$$\overline{OA}(\varphi, \bar{p}) = \text{TurnXY}(\bar{e}_X, \varphi, p_1) \quad (3)$$

(выражение (3) дает вектор звена OA путем поворота единичного вектора оси X на угол φ против хода часовой стрелки (перед углом стоит знак «+») с изменением его длины на оптимизируемую длину $p_1 \equiv L_{OA}$);

$$\bar{A}(\varphi, \bar{p}) = \bar{O}(\bar{p}) + \overline{OA}(\varphi, \bar{p}); \quad \bar{CA}(\varphi, \bar{p}) = \bar{A}(\varphi, \bar{p}) - \bar{C}; \quad (4)$$

$$\alpha_{BCA}(\varphi, \bar{p}) = T \cos(|\bar{CA}(\varphi, \bar{p})|, p_2, p_3) \quad (5)$$

(формула (5) описывает вычисление угла α_{BCA} с помощью теоремы косинусов по заданным оптимизируемым длинам звеньев $p_2 \equiv L_{BC}$ и $p_3 \equiv L_{AB}$, а также модулю вектора CA , определяющему расстояние между точками C и A);

$$\overline{CB}(\varphi, \bar{p}) = \text{TurnXY}(\overline{CA}(\varphi, \bar{p}), \alpha_{BCA}(\varphi, \bar{p}), p_2); \quad (6)$$

$$\bar{B}(\varphi, \bar{p}) = \bar{C} + \overline{CB}(\varphi, \bar{p}); \quad \overline{AB}(\varphi, \bar{p}) = \bar{B}(\varphi, \bar{p}) - \bar{A}(\varphi, \bar{p}); \quad (7)$$

$$\overline{BM}(\varphi, \bar{p}) = \text{TurnXY}(\overline{AB}(\varphi, \bar{p}), 0, p_4); \quad (8)$$

(выражение (8) позволяет получить вектор звена BM , являющийся коллинеарным к исходному поворачиваемому вектору звена AB , поворот исходного вектора осуществлен на нулевой угол);

$$\bar{M}(\varphi, \bar{p}) = \bar{B}(\varphi, \bar{p}) + \overline{BM}(\varphi, \bar{p}). \quad (9)$$

Приведенные выражения (2)–(9) представляют собой функции, зависящие не только от обобщенной координаты – угла φ поворота ведущего звена, но и от вектора (1) оптимизируемых параметров.

Постановка и решение задачи оптимизационного синтеза. В большинстве случаев аналитическое решение задачи оптимизационного кинематического синтеза рычажного механизма позволяет приближенно реализовать требуемую траекторию движения интересующей точки механизма. После разработки и внедрения в современные математические пакеты и языки программирования высокоэффективных алгоритмов оптимизации стало возможным существенно повысить точность решения рассматриваемой задачи.

Задача любого оптимизационного синтеза заключается в минимизации некоторой целевой функции. Как правило, при ее формировании используется метод, связанный с анализом невязок некоторого расчетного параметра по сравнению с его оптимальным (допускаемым) значением [5, 6]. Для рассматриваемого механизма в качестве такой невязки принято отклонение расчетной траектории шатунной кривой радиус-вектора точки M от ее заданной оптимальной траектории M^* , а сама сформированная целевая функция может быть представлена в следующем виде:

$$f(\bar{p}) = \sum_{i=1}^n \left| \bar{M}(\varphi_i, \bar{p}) - \bar{M}_i^* \right|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где n – число заданных точек на прямолинейном участке траектории.

Для проведения оптимизационного кинематического синтеза рассматриваемого лямбда-механизма путем минимизации сформированной целевой функции (10) применен метод деформируемого многогранника, известный также как метод Нелдера – Мида [18]. Указанный метод работает с симплексом – геометрической фигурой, каждая вершина которой соответствует некоторому вектору набора оптимизируемых параметров.

Для программной реализации оптимизационного алгоритма деформируемого многогранника использовались известные блок-схемы [8, 18, 19], примеры адаптации алгоритма в различных математических пакетах и языках программирования [19–22], а также работы [23–25]. В результате была осуществлена программная реализация полностью работоспособного оптимизационного алгоритма для математического пакета PTC.MathCAD [26].

Особенностью данного алгоритма стали использование легко читаемого программного кода за счет применения осмысленных буквенных обозначений для вершин симплекса (вместо i -х индексов); автоматизированное формирование вершин исходного регулярного симплекса, интегрированное в тело алгоритма; ряд второстепенных программных улучшений, направленных на повышение эффективности работы алгоритма. Также стоит отметить, что из-за обнаруженного разночтения в опубликованных блок-схемах алгоритма в качестве исходной была принята оригинальная схема [18].

Работоспособность оптимизационного алгоритма проводилась в среде математического пакета PTC.MathCAD на известных тестовых функциях [27]. Установлено, что метод деформируемого многогранника дает достаточно высокую точность решения, а также скорость сходимости за счет отсутствия операций с производными. Следовательно, данный метод обладает потенциалом для использования при большом числе оптимизируемых параметров и применении более сложных критериев оптимизации, что особенно важно при проведении кинематического синтеза многосвязных рычажных механизмов.

Результаты и обсуждение. Из аналитической геометрии известно, что если одна из вершин регулярного симплекса соответствует точке исходного вектора оптимизируемых параметров, то координаты оставшихся вершин такого симплекса удобно задавать с помощью матрицы размера $N \times (N+1)$, где N – число вершин симплекса [8, 9]. Для принятого вектора оптимизируемых параметров (1), состоящего из пяти элементов, она имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_1 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_1 & d_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 \end{bmatrix} + \bar{p}_{in}; \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{a}{N \cdot \sqrt{2}} (\sqrt{N+1} + N - 1); \\ d_2 &= \frac{a}{N \cdot \sqrt{2}} (\sqrt{N+1} - 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где a – расстояние между двумя вершинами симплекса; \bar{p}_{in} – исходный вектор оптимизируемых параметров, используемый в качестве начального приближения в оптимизационном алгоритме.

После того как сформирована матрица вершин исходного регулярного симплекса, можно применить предложенный математический алгоритм оптимизации методом деформируемого многогранника [26], для которого входными параметрами будут выступать матрица вершин регулярного симплекса (11) и целевая функция (10), а выходным параметром – вектор найденных оптимизированных параметров:

$$\bar{p}_{nm} = NM(f(\bar{p}), X).$$

На рисунке 2 приведена визуализация в математическом пакете PTC.MathCAD кинематической схемы рассматриваемого рычажного механизма до и после проведения оптимизационного кинематического синтеза методом деформируемого многогранника, а в таблице 1 приведены числовые значения для вектора исходных и оптимизированных параметров.

Как видно из полученных результатов расчета (см. рисунок 2, б), прямолинейный участок траектории шатунной кривой точки M полностью удовлетворяет всем предъявленным требованиям (проходит через все заданные точки). При этом значения трех оптимизируемых параметров (длин звеньев L_{BC} , L_{AB} , L_{BM}) получены практически равными друг другу, что соответствует известным аналитическим выражениям [1, 10].

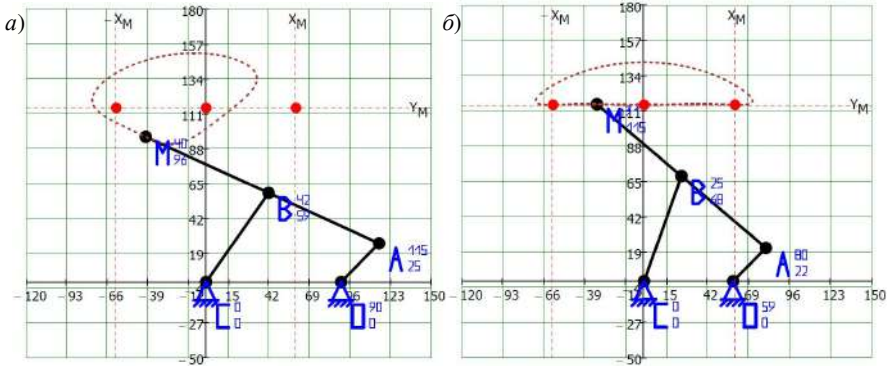


Рисунок 2 – Визуализация в математическом пакете PTC.MathCAD кинематической схемы механизма до (а) и после (б) проведения оптимизационного синтеза

Таблица 1 – Результаты оптимизационного синтеза

В миллиметрах

Вектор	Оптимизируемые параметры					
	O_X	L_{OA}	L_{BC}	L_{AB}	L_{BM}	f
\bar{p}_{in}	90,0	36,0	72,0	81,0	90,0	–
\bar{p}_{nm}	58,6	30,6	72,7	72,7	72,8	0,002
\bar{p}_{mcd}	60,3	31,5	73,7	74,1	72,5	0,446

Примечание – Задан прямолинейный участок траектории $Y_M = 115$ мм и $X_M = \pm 60$ мм.

Стоит отметить, что на сегодня все современные оптимизационные алгоритмы должны иметь возможность решать задачи с учетом функциональных ограничений. Решение таких задач имеет большое практическое значение для машиностроения, так как такие ограничения могут накладываться в процессе кинематического синтеза на все оптимизируемые параметры, например, на длины звеньев. Как показали результаты исследования, оптимизационный алгоритм деформируемого многогранника возможно адаптировать к решению задач условной оптимизации с ограничениями в виде равенств и (или) неравенств без существенного снижения точности и скорости решения, используя метод штрафных или барьерных функций [8].

Для решения задачи оптимизационного кинематического синтеза все наложенные ограничения должны быть приведены к виду

$$h_i(\bar{p}) = 0 ; g_i(\bar{p}) < 0.$$

Тогда, воспользовавшись методом штрафных функций, суммарные функции штрафов можно представить в виде [8, 20]

$$h_{\Sigma}(\bar{p}) = C_h \sum_i |h_i(\bar{p})|^2 ; g_{\Sigma}(\bar{p}) = C_g \sum_i \max(0, g_i(\bar{p}))^2, \quad (12)$$

где C_h и C_g – коэффициенты штрафов для равенств и неравенств.

Затем сформированную общую функцию штрафов (12) необходимо добавить к целевой функции (10) и заново решить оптимизационную задачу методом деформируемого многогранника:

$$\bar{p}_{nm}^* = NM(f(\bar{p}) + h_{\Sigma}(\bar{p}) + g_{\Sigma}(\bar{p}), X).$$

Проверка адекватности. Для проверки достоверности найденного глобального минимума целевой функции применялись два наиболее распространенных подхода. Первый заключался в сравнении с результатами расчета, полученными с помощью других уже проверенных оптимизационных алгоритмов, а второй – в анализе результатов, полученных для разных начальных значений исходного вектора оптимизируемых параметров.

Проверка оптимизационного алгоритма с помощью первого подхода проводилась при помощи встроенного в математический пакет PTC.MathCAD функции численной минимизации [20, 22]

$$\bar{p}_{mcd} = \text{minimize}(f(\bar{p}), \bar{p}),$$

результаты расчета по которой приведены в таблице 1.

Проверка с помощью второго подхода проводилась путем изменения значений для вектора оптимизируемых параметров в пределах $\pm 30\%$ от их исходных величин с последующим отслеживаем поиска оптимального решения алгоритмом. Все полученные результаты проверки подтвердили достаточную устойчивую сходимую оптимизационного алгоритма к одному и тому же глобальному минимуму целевой функции.

Выводы. В работе представлен алгоритм и результаты оптимизационного кинематического синтеза рычажного механизма методом деформируемого многогранника. Данный метод показал высокую скорость поиска оптимального решения, эффективность применения при большом числе оптимизируемых параметров, а также возможность постановки задачи с учетом или без учета дополнительных ограничений. В то же время при анализе сильно овражных функций метод деформируемого многогранника чувствителен к начальным условиям, что необходимо учитывать в случае применения данного оптимизационного алгоритма к конкретной поставленной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Артоболевский, И. И. Механизмы в современной технике : справ. пособие : в 7 т. / И. И. Артоболевский. – 2-е изд. перераб. – М. : Наука, 1979. – Т. 1 : Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. – 496 с.

2 Артоболевский, И. И. Синтез плоских механизмов : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.

3 Optimal synthesis of four-bar linkages for path generation using the individual repairing method / X. Yao, X. Wang, W. Sun [et al.] // Mechanical Sciences. – 2022. – Vol. 13, is. 1. – P. 79–87.

4 Optimum dimensional synthesis of planar mechanisms with geometric constraints / V. Garcia-Marina, I. Fernandez de Bustos, G. Urkullu, R. Ansola // *Meccanica*. – 2020. – Vol. 55, is. 11. – P. 2135–2158.

5 **Халтурин, М. А.** Синтез прямолинейно-направляющего механизма для отрезки заготовок эскимо / М. А. Халтурин // *Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки*. – 2019. – № 1 (3). – С. 27–34.

6 **Бейсенов, Н. К.** Оптимизационно-метрический синтез шарнирного четырехзвенника / Н. К. Бейсенов // *Технические науки – от теории к практике*. – 2016. – № 2 (50). – С. 65–77.

7 **Гебель, Е. С.** Оптимизационный кинематический синтез четырехзвенного рычажного механизма по двум заданным положениям / Е. С. Гебель, Е. А. Чигринова // *Омский научный вестник*. – 2020. – № 3 (171). – С. 21–25.

8 **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

9 **Аттетков, А. В.** Методы оптимизации : учеб. для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 439 с.

10 **Баранов, Г. Г.** Курс теории механизмов и машин / Г. Г. Баранов. – М. : Машиностроение, 1975. – 494 с.

11 **Будзило, Е. Е.** Использование нового бульдозерного оборудования с механизмом Чебышева при производстве строительных работ / Е. Е. Будзило, Е. В. Гречишкина, М. Ю. Псюк // *Наукоёмкие технологии и оборудование в промышленности и строительстве*. – 2023. – № 2 (76). – С. 106–113.

12 **Manickavelan, K.** Design, fabrication and analysis of four bar walking machine based on Chebyshev's parallel motion mechanism / K. Manickavelan, B. Singh, N. Sellappan // *European International Journal of Science and Technology*. – 2014. – Vol. 3, is. 8. – P. 65–73.

13 **Mehdigholi, H.** Optimization of Watt's six-bar linkage to generate straight and parallel leg motion / H. Mehdigholi, S. Akbarnejad // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. – 2012. – Vol. 9, is. 1. – P. 1–6.

14 **Поляков, Б. Н.** Оптимизация кинематических параметров рычажных четырехзвенных механизмов / Б. Н. Поляков // *Прикладная информатика*. – 2010. – № 3 (27). – С. 108–112.

15 **Бобыренко, С. Н.** Моделирование процесса работы механизма подпрессовки питающего аппарата кормоуборочного комбайна / С. Н. Бобыренко, А. В. Котов // *Вестник Белорусско-Российского университета*. – 2011. – № 1 (30). – С. 18–26.

16 **Котов, А. В.** Оптимизация параметров предохранительного элемента пальчикового механизма шнека жатки зерноуборочного комбайна / А. В. Котов // *Тракторы и сельхозмашины*. – 2023. – Т. 90, № 1. – С. 13–24.

17 **Котов, А. В.** Анализ уравновешенности кривошипно-ползунного механизма привода режущего аппарата методом векторов главных точек / А. В. Котов // *Тракторы и сельхозмашины*. – 2024. – Т. 91, № 2. – С. 167–180.

18 **Nelder, J. A.** A simplex method for function minimization / J. A. Nelder, R. Mead // *The Computer Journal*. – 1965. – Vol. 7, is. 4. – P. 308–313.

19 **Банди, Б.** Методы оптимизации: вводный курс / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.

20 Гальченко, В. Я. MathCAD: математические методы и инструментальные средства оптимизации / В. Я. Гальченко, Р. В. Трёмбовецкая. – Черкассы : ЧП Гордиенко Е. И., 2018. – 516 с.

21 Мэтьюз, Дж. Г. Численные методы. Использование MATLAB / Дж. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. – М. : Вильямс, 2001. – 720 с.

22 Дмитриева, Т. Л. Реализация условной задачи нелинейного математического программирования с использованием метода деформируемого многогранника в программе MathCAD / Т. Л. Дмитриева, В. Т. Нгуен // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2014. – № 4 (44). – С. 73–79.

23 Lagarias, J. C. Convergence of the restricted Nelder-Mead algorithm in two dimensions / J. C. Lagarias, B. Poonen, M. H. Wright // SIAM Journal on Optimization. – 2012. – Vol. 22, is. 2. – P. 501–532.

24 Суфиянов, В. Г. Метод Нелдера-Мида решения задачи оптимизации геометрической формы ствола автоматической пушки для улучшения колебательных характеристик / В. Г. Суфиянов, Д. А. Клокин, И. Г. Русяк // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2023. – Т. 25, № 4 (114). – С. 121–131.

25 Петрушин, А. Д. Оптимизация активной части вентильно-индукторного электродвигателя / А. Д. Петрушин, А. В. Кашуба // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 1 (61). – С. 61–65.

26 Алгоритм деформируемого многогранника. – URL : https://drive.google.com/file/d/172ozZXepgDCfWc3eA4_xJd_zgVEIpyv (дата обращения: 21.10.2025).

27 Тимофеева, О. П. Исследование популяционных алгоритмов в решении задач непрерывной оптимизации / О. П. Тимофеева, С. А. Неимушев, Л. И. Неимушева // Труды НГТУ им. П. Е. Алексеева. – 2018. – № 4 (123). – С. 48–55.

A. V. KOTOV^{1,2}, D. G. KROL²

¹JSC Seismotekhnika, Gomel, Belarus

²Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus

EVALUATION OF THE POSSIBILITY OF APPLYING THE DEFORMABLE POLYHEDRON METHOD TO THE PROBLEM OF KINEMATIC SYNTHESIS OPTIMIZATION FOR A FLAT LEVER MECHANISM

The paper presents a mathematical formulation and solution results for the problem of optimization kinematic synthesis of a flat lever mechanism, reproducing a given trajectory of the output link's motion point, using the deformable polyhedron method. A qualitative assessment of the method effectiveness in performing multiparameter optimization kinematic synthesis of mechanisms, with and without the possibility of imposing additional constraints, is provided.

Keywords: lambda mechanism, optimization synthesis, deformable polyhedron, simplex, constraints.

Получено 30.10.2025

УДК 62-419:534.131

Е. А. ЛАЧУГИНА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ МГНОВЕННОМ ПРИЛОЖЕНИИ НАГРУЗКИ

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины. Построено аналитическое решение методом разложения перемещений в ряд по системе собственных ортонормированных функций. В качестве примера использования найденного решения проведен численный анализ колебаний пластины, возникающих вследствие мгновенного приложения равномерно распределенной нагрузки.

Ключевые слова: круглая пятислойная пластина, несимметричная по толщине пластина, вынужденные колебания, равномерно распределенная нагрузка.

В связи с расширением использования металлополимерных систем существует необходимость развития методов решения задач об их квазистатическом и динамическом нагружении. Современные подходы к построению расчетных моделей механики слоистых элементов конструкций изложены в монографиях [1–3].

Деформирование трехслойных и пятислойных пластин при статических нагрузках исследовано в статьях [4–6]. Сжимаемость заполнителя принималась линейной по толщине пластины, модель Пастернака позволила учесть наличие сдвиговых напряжений в основании. В пятислойных пластинах предполагалось наличие двух заполнителей.

Динамические процессы, происходящие в трехслойных цилиндрических оболочках и пластинах, изучались в работах [7, 8], где были получены аналитические решения с использованием метода разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня проведен в [9, 10]. Работы [11–15] посвящены исследованию свободных колебаний пятислойных симметричных и несимметричных по толщине пластин с двумя заполнителями.

В данной статье исследуется динамика несимметричной по толщине пятислойной пластины с двумя легкими заполнителями при мгновенном приложении равномерно распределенной нагрузки на основе решения начально-краевой задачи о вынужденных колебаниях.

Аналогично работе [13] рассматривается упругая несимметричная по толщине пятислойная круговая пластина, включающая три несущих слоя и два заполнителя. На ее контуре предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z (рисунок 1), которая связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. В качестве искомых функций в начально-краевой задаче

принимаются радиальное перемещение координатной поверхности $u(r, t)$, относительные сдвиги в обоих заполнителях $\psi_1(r, t)$, $\psi_2(r, t)$ и прогиб $w(r, t)$.

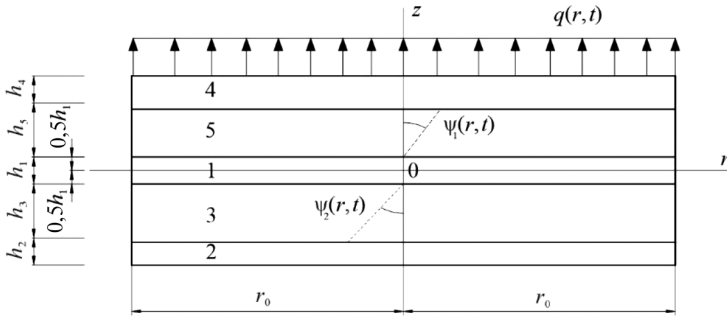


Рисунок 1 – Схема пятислойной пластины

Предполагается, что тонкие слои 1, 2, 4 обладают значительной жесткостью при сдвиге и их деформирование подчиняется классическим гипотезам Кирхгофа. Для относительно толстых заполнителей 3, 5 сдвиговые деформации существенны, и поэтому используется гипотеза Тимошенко. Сжимаемость слоев в поперечном направлении и относительное проскальзывание между слоями отсутствуют.

Напряжения и деформации в слоях связаны соотношениями линейной теории упругости:

$$s_{\alpha\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$s_{rz}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(k)} \quad (k = 3, 5), \quad (1)$$

где $s_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\theta^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев; $k = 1, \dots, 5$ – номер слоя.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные колебания пятислойной круговой пластины несимметричной по толщине с легкими заполнителями, получена с помощью вариационного принципа Лагранжа в [13] и имеет вид

$$L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) = 0; \quad L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) = 0;$$

$$L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) = 0; \quad L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_5 \psi_1 + a_7 \psi_2) - M_0 \ddot{w} = q, \quad (2)$$

где L_2 , L_3 – дифференциальные операторы [14]; a_1, \dots, a_9 – коэффициенты, выражения которых приведены в [13]; $M_0 \ddot{w}$ – поперечные силы инерции;

$$M_0 = r_0^2 \sum_{k=1}^5 \rho_k h_k;$$

$q(r, t)$ – внешняя осесимметричная поверхностная нагрузка; ρ_k – плотность материала слоя.

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (2) граничных условий на контуре и условий ограниченности решения в центре пластины. Например, в случае заделки контура

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (3)$$

Решение уравнений (2) проводится с помощью разложения искомого перемещения $u(r, t)$, $\psi_1(r, t)$, $\psi_2(r, t)$, $w(r, t)$ и внешней нагрузки $q(r, t)$ в ряды по системам собственных ортонормированных функций v_n :

$$\begin{aligned} u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi_1(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi_2(r, t) = b_3 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \\ w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_0(\beta_n r) \right]$; $\varphi_n = v_{n,r}$; $T_n(t)$ – подлежащая определению функция времени; d_n – константы, которые определяются из требования нормировки; J_0, I_0 – функции Бесселя.

Используемая система собственных фундаментальных функций обладает полнотой, поэтому ряды в (4) сходятся равномерно. Следовательно, искомые функции могут считаться непрерывными и дифференцируемыми.

Чтобы найти коэффициенты разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций, $q_n(t)$ умножим на функцию $v_n(\beta_n r)$ в последнем из соотношений в (10) и проинтегрируем по радиусу пластины:

$$\int_0^{r_0} q(r, t) v_n r dr = M_0 \int_0^{r_0} \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n r dr = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^{r_0} v_m v_n r dr. \quad (5)$$

В силу ортонормированности системы собственных функций правая часть уравнения (5) будет отличной от нуля только при $m = n$. Отсюда

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_0} q(r, t) v_n r dr. \quad (6)$$

После линейных преобразований и двукратного интегрирования первых трех уравнений система дифференциальных уравнений (2) приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}; \quad \psi_1 = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}; \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + \frac{C_6}{r}; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = -Dq \quad (M^4 = M_0 D), \end{aligned} \quad (7)$$

где b_1 – b_3 , D – коэффициенты, которые выражаются через a_i по формулам, приведенным в [13]; C_1, \dots, C_6 – константы интегрирования. Учитывая ограниченность искомого решения в начале координат, имеем $C_2 = C_4 = C_6 = 0$.

Подстановка прогиба и нагрузки из (4), (6) в четвертое уравнение системы (7) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L_3(v_n, r) T_n(t) + M^4 v_n \ddot{T}_n(t)) = -M_0 D \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t). \quad (8)$$

Собственные функции $v_n(\beta_n r)$ удовлетворяют уравнению [14]:

$$L_3(v_n, r) - \beta_n^4 v_n = 0. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8) и, учитывая, что собственные числа оператора $L_3 \beta^4 = M^4 \omega^2$ (ω – частота собственных колебаний), получим

$$M^4 \sum_{n=0}^{\infty} v_n (T_n \omega_n^2 + \ddot{T}_n) = -M^4 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n. \quad (10)$$

Приравнявая коэффициенты перед собственными ортонормированными функциями в (10), получим уравнение для определения входящей в (4) искомой функции времени $T_n(t)$

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) можно записать в виде [3]

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий. Полагая, что в начальный момент времени прогиб и скорость составляют соответственно

$$w_0(r) = 10^{-3} \left(1 - (r/r_0)^2\right); \quad \dot{w}_0(r) = 0, \quad (13)$$

получаем

$$A_n = 10^{-3} \int_0^{r_0} \left(1 - (r/r_0)^2\right) v_n r dr, \quad B_n = 0. \quad (14)$$

Если осесимметричная круговая распределенная нагрузка воздействует на внешнюю поверхность верхнего несущего слоя, то имеем

$$q_n(t) = \frac{q_0 r_0}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n r_0) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n r_0) \right). \quad (15)$$

Функция времени $T_n(t)$ вычисляется по формуле (12) с учетом (14), (15). При постоянной во времени интенсивности приложенной нагрузки q_0 и нулевых начальных условиях получаем

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + \frac{q_0 r_0 (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left(J_1(\beta_n r_0) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_1(\beta_n r_0) \right). \quad (16)$$

Прогиб $w(r, t)$, относительные сдвиги $\psi_1(r, t)$, $\psi_2(r, t)$ и радиальное перемещение $u(r, t)$ при воздействии осесимметричной приложенной нагрузки,

определяются соотношениями (4), при собственных функциях $v_n(\beta_n r)$, $\varphi_n(\beta_n r)$ и функции времени (16).

Численный анализ выполнен для пятислойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$ м). Толщины слоев приняты следующие: $h_2 = 0,01$, $h_4 = 0,03$, $h_1 = 0,02$, $h_3 = 0,2$, $h_5 = 0,2$; момент времени $t_0 = \pi / \omega_0$. Вычисления проведены с использованием математического пакета Maple.

В несимметричной пластине с базовой геометрией изменение прогиба $w(r, t_0)$ без начального прогиба показано на рисунке 2, а, с начальным прогибом (19) – на рисунке 2, б в зависимости от радиуса пластины при различных материалах верхнего несущего слоя h_4 : 1 – Д16Т, 2 – титан, 3 – кордиерит. При отсутствии начального прогиба замена на титан приводит к снижению максимального прогиба на 21 %, а на кордиерит – на 83 %. В условиях наличия начального прогиба наблюдается более значительное уменьшение данного параметра: на 30 % для титана и на 115 % для кордиерита.

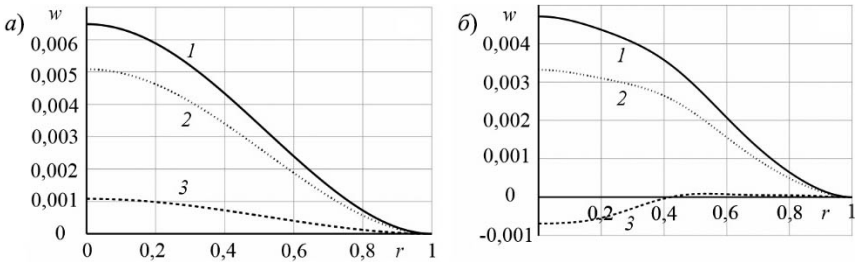


Рисунок 2 – Прогиб пятислойной пластины:

а – при отсутствии начального прогиба; б – при наличии начального прогиба (13)

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют влияние начального прогиба (13) на изменение во времени максимального прогиба $w(0, t)$ и относительного сдвига $\psi_1(0,5, t)$ при нагрузке, распределенной по всей верхней поверхности пластины для случаев: 1 – без начального прогиба; 2 – при заданном начальном прогибе.

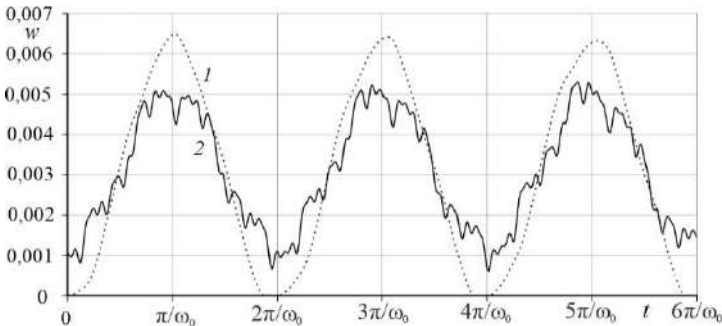


Рисунок 3 – Изменение прогиба во времени при мгновенном приложении нагрузки, распределенной по всей верхней поверхности пластины:

1 – без начального прогиба; 2 – при наличии начального прогиба

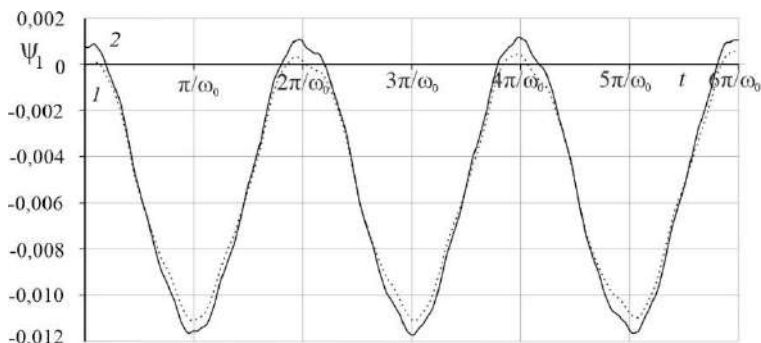


Рисунок 4 – Зависимость относительного сдвига от времени при мгновенном приложении нагрузки, распределенной по всей верхней поверхности пластины
1 – без начального прогиба; 2 – при наличии начального прогиба

В случае отсутствия начального прогиба наблюдается отнулевой синусоидальный цикл колебаний. При наличии начального прогиба цикл перестает быть отнулевым (см. рисунок 3), график сжимается по вертикали, максимум уменьшается примерно на 21,5 %. График относительного сдвига верхнего заполнителя ψ_1 при наличии начального прогиба растягивается по вертикали (см. рисунок 4), его максимальное по модулю значение увеличивается приблизительно на 9 %.

Таким образом, предложенное аналитическое решение позволяет проводить численный анализ вынужденных колебаний несимметричных по толщине круговых пятислойных пластин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T24M-004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Zhuravkov, M.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.

2 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

5 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 2, № 3. – С. 392–406.

6 Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

7 Леоненко, Д. В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

8 Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, is. 5. – P. 474–481.

9 Будникова, Д. А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

10 Старовойтов, Э. И. Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.

11 Лачугина, Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жестким наполнителем / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 116–122.

12 Лачугина, Е. А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

13 Лачугина, Е. А. Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 92–99.

14 Лачугина, Е. А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

15 Lachugina, E. Natural fluctuations of a five-layer thickness unsymmetrical plate / E. Lachugina // AIP Conference Proceedings. – 2025. – Vol. 3265. – Article 050005.

E. A. LACHUGINA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

OSCILLATIONS OF A FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE UNDER INSTANTANEOUS LOAD APPLICATION

The problem of forced oscillations of a five-layer circular plate, asymmetric in thickness, is considered. An analytical solution is obtained by expanding the displacements in the series of orthonormal eigenfunctions. As an example of the resulting solution application a numerical analysis of the plate vibrations arising from the instantaneous application of a uniformly distributed load is performed.

Keywords: five-layer circular plate, thickness-asymmetric plate, forced vibrations, uniformly distributed load.

Получено 31.10.2025

УДК 534.131:62-419

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-СТЕРЖНЯ С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрены вынужденные колебания сэндвич-стержня с защемленными торцами. С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения для случая, при котором деформирование внешних слоев описывается моделью Бернулли, а внутреннего – моделью Тимошенко. Решение системы получено разложением в ряды. Проведен численный анализ для случая действия равномерно распределенной гармонической резонансной нагрузки.

Ключевые слова: сэндвич-стержень, резонанс, легкий наполнитель.

Введение. В последние годы было проведено множество исследований, посвященных анализу статике и динамике трехслойных конструкций с различными типами наполнителей. В работах [1, 2] рассмотрено статическое и динамическое деформирование трехслойных пластин при действии различных нагрузок. Публикация [3] посвящена статическому нагружению трехслойного стержня термосиловыми воздействиями. В статье [4] построена нелинейная модель сэндвич-балки с вязкоупругим наполнителем, демонстрирующая зависимость резонансной частоты от амплитуды возбуждения. Авторы показали, что при определенных условиях возможно снижение коэффициента затухания при росте энергии возбуждения, что приводит к проявлению нелинейных резонансных эффектов. Исследование, выполненное в [5], сосредоточено на экспериментальном и теоретическом анализе сэндвич-стержня с трехмерной решетчатой структурой внутреннего слоя. Авторы работы [6] рассмотрели конечно-элементную модель балки с вязкоупругим наполнителем, учитывающую частотно-зависимое поведение материала. Модель была верифицирована экспериментально и может быть использована для оценки низших собственных частот и форм колебаний.

Свободные колебания решетчатых сэндвич-стержней с произвольными упругими опорами изучались с помощью аналитической модели в [7]. В работе [8] предложены рекомендации по проектированию консольных трехслойных сэндвич-балок, обеспечивающие эффективное гашение вибраций за счет подбора свойств наполнителя. Статья [9] посвящена свободным и вынужденным колебаниям сэндвич-балок с локально-резонансными демпферами. В работе с применением численных методов анализировалось влияние резонаторов на динамическое поведение системы. В публикации [10] рассмотрены нелинейные вынужденные колебания сэндвич-стержня с вязко-

упругим слоем ядра, причем аналитическая модель учитывает нормальные, поперечные деформации и сдвиг в заполнителе, используя уточненную теорию ломаной линии высшего порядка. В статье [11] изучены колебания трехслойного стержня на упругом винклеровом основании.

В статье [12] было представлено решение задачи о собственных колебаниях стержня с несжимаемым заполнителем. В данной работе рассматриваются вынужденные резонансные колебания симметричного трехслойного стержня.

1 Постановка начально-краевой задачи. Рассматриваются колебания сэндвич-стержня под действием гармонической нагрузки. Перемещения в несущих внешних слоях соответствуют модели Бернулли, во внутреннем слое (заполнителе) – модели Тимошенко. Заполнитель считаем несжимаемым, легким.

Начало системы координат располагается на левом торце стержня, а горизонтальная ось x совпадает с центральной осью заполнителя. На внешнюю поверхность верхнего несущего слоя действует переменная нагрузка $q(x, t)$ (рисунок 1). В качестве искомым функций принимаем прогиб $w(x, t)$ и относительный угол сдвига нормали в заполнителе $\psi(x, t)$.

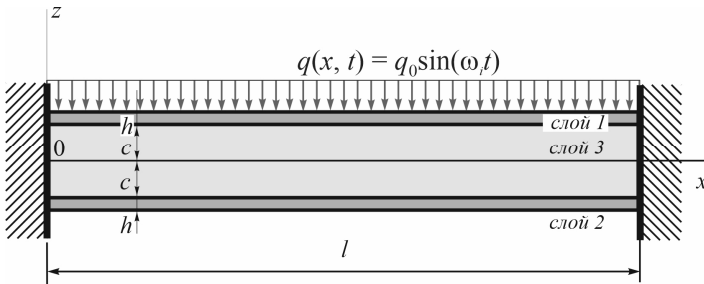


Рисунок 1 – Расчетная схема сэндвич-стержня

Уравнения движения получим, используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [13],

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0 ; \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta A) dt = 0 , \quad (1)$$

где K – кинетическая энергия системы; W – потенциальная энергия деформации; $A = A_1 + A_2$ – суммарная потенциальная энергия, численно равная сумме работ внешних нагрузок и торцевых усилий.

Потенциальную энергию деформации W определяем, пренебрегая энергией касательных напряжений σ_{xz} :

$$W = b_0 \int_0^l \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \epsilon_x^{(k)} dz dx , \quad (2)$$

где b_0 – ширина поперечного сечения; $\sigma_x^{(k)}, \varepsilon_x^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Кинетическая энергия сэндвич-стержня

$$K = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\frac{\rho_k}{2} \left((\dot{w}^{(k)})^2 + (\dot{u}^{(k)})^2 \right) \right] dz dx, \quad (3)$$

где ρ_k – плотность материала; $w^{(k)}, u^{(k)}$ – перемещения точек k -го слоя; точка над функцией обозначает производную по времени.

Потенциальная энергия, обусловленная действием внешней нагрузки и внешних сил и моментов на торцах,

$$A_1 = \iint_S q w dS = b_0 \int_0^l q w dx, \quad A_2 = (N_0 - N_l)u + (Q_0 - Q_l)w - (M_0 - M_l)w_{,x}, \quad (4)$$

где $N_0, Q_0, M_0, N_l, Q_l, M_l$ – заданные силы и моменты на торцах ($x = 0; l$), запятая в нижнем индексе обозначает производные по следующим за ней переменным.

Подставляя выражения для энергий (2)–(4) в (1) и приравнявая коэффициенты при вариациях, приходим к системе дифференциальных уравнений движения, выраженной через внутренние силовые факторы:

$$\begin{aligned} c(N^{(1)}_{,x} - N^{(2)}_{,x}) + M^{(3)}_{,x} &= 0, \\ M_{,xx} &= m_1 \ddot{w} - q, \end{aligned} \quad (5)$$

где $N^{(k)}, M^{(k)}$ – продольные силы и изгибающие моменты в слоях стержня,

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz; \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz;$$

M – обобщенный внутренний момент,

$$M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)};$$

m_1 – инерционный член [12].

С помощью соотношений закона Гука, выражая обобщенные моменты в (5) через перемещения, получим систему дифференциальных уравнений движения в перемещениях:

$$\begin{aligned} b_1 \Psi_{,xx} - b_2 w_{,xxx} &= 0, \\ b_2 \Psi_{,xxx} - b_3 w_{,xxxx} &= m_1 \ddot{w} - q. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения коэффициентов системы (6) представлены в [12].

Замыкание начально-краевой задачи осуществляется присоединением к (6) граничных и начальных условий закрепления торцов стержня.

Начальные условия движения принимаем в виде

$$\text{при } t = 0 \quad w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (7)$$

где $w_0(x)$, $\dot{w}_0(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединной поверхности заполнителя.

2 Решение задачи. Рассмотрим действие на стержень гармонической нагрузки

$$q(x, t) = q_0 (D \cos(\omega_i t) + E \sin(\omega_i t)), \quad (8)$$

где q_0 – амплитуда интенсивности равномерно распределенной нагрузки; D , E – константы; ω_i – частота внешней возмущающей силы, которая совпадает с i -й собственной частотой колебаний стержня; t – время.

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемого стержня искомые перемещения $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ и внешнюю нагрузку $q(r, t)$ представим в виде следующих разложений в ряды:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{b_2}{b_1} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) T_n(t); \quad w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) T_n(t); \\ q(x, t) &= m_1 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) q_n(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для жестко защемленного с двух торцов стержня координатные функции принимают вид

$$\Psi_n(x) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left(-\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\sin(\lambda_n x) + \text{sh}(\lambda_n x)) - \text{ch}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right);$$

$$W_n(x) = \frac{1}{d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\cos(\lambda_n x) - \text{ch}(\lambda_n x)) - \text{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) \right);$$

$$q_n(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^l q(x, t) W_n(x) dx;$$

$$d_n^2 = \int_0^l \left[\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\cos(\lambda_n x) - \text{ch}(\lambda_n x)) - \text{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) \right]^2 dx, \quad (10)$$

где λ_n – собственные числа, определяемые условиями закрепления торцов стержня.

Из системы (6) с учетом выражения нагрузки (8) получаем дифференциальное уравнение относительно прогиба стержня

$$w_{,xxxx} + f_1 \ddot{w} = \frac{f_1 q_0}{m_1} (D \cos(\omega_i t) + E \sin(\omega_i t)), \quad (11)$$

где

$$f_1 = \frac{m_1 b_1}{b_1 b_3 - b_2^2}.$$

Функции $q_n(t)$ получим в виде

$$q_n(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^l q(x, t) W_n(x) dx = D_n \cos(\omega_i t) + E_n \sin(\omega_i t), \quad (12)$$

где

$$D_n = \frac{2q_0 D}{m_1 \lambda_n d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} + 1 \right), \quad E_n = \frac{2q_0 E}{m_1 \lambda_n d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} + 1 \right).$$

Подстановка в (11) выражений (12), (9) совместно с использованием координатных функций (10) приводят к уравнению для определения функций времени $T_n(t)$:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t).$$

Его решение может быть записано в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (13)$$

где $y_n(t)$ – частное решение уравнения,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \cos(\omega_i t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \sin(\omega_i t), & n \neq i; \\ -\frac{E_i}{2\omega_i} t \cos(\omega_i t) + \frac{D_i}{2\omega_i} t \sin(\omega_i t), & n = i. \end{cases}$$

Константы интегрирования A_n и B_n при использованных начальных условиях движения (7)

$$A_n = \int_0^l w_0(x) W_n dx - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2}, & n \neq i; \\ 0, & n = i; \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \left[\int_0^l \dot{w}_0(x) W_n dx - \begin{cases} \frac{\omega_i E_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2}, & n \neq i \\ -\frac{E_i}{2\omega_i}, & n = i \end{cases} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, под действием резонансной нагрузки (8) поперечные колебания трехслойного сэндвич-стержня описываются перемещениями (9), в которых функция времени $T_n(t)$ и константы интегрирования определяются выражениями (13), (14).

3 Численный анализ. Для численного исследования рассмотрим защемленную с обоих концов балку из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т с толщинами слоев $h = 0,02$; $c = 0,09$ [1], которая находится под действием равномерно-распределенной нагрузки с амплитудой интенсивности $q_0 = -500$ Па.

На рисунке 2 показано изменение прогиба в середине стержня ($x = 0,5 l$) при частотах собственных колебаний $\omega_0 = 398 \text{ c}^{-1}$ (а) и $\omega_1 = 1098 \text{ c}^{-1}$ (б). На графиках представлено весьма большое количество периодов, поэтому отдельные колебания неразличимы. Из рисунка 2, а видно, что при совпадении частоты внешней нагрузки с ω_0 происходит линейный рост амплитуды. В случае совпадения частоты внешней нагрузки с ω_1 увеличения максимального отклонения со временем не происходит, имеет место ложный резонанс. Данное явление для подобных трехслойных систем было исследовано в [14]. Аналогичные ситуации имеют место для всех четных и нечетных частот соответственно.

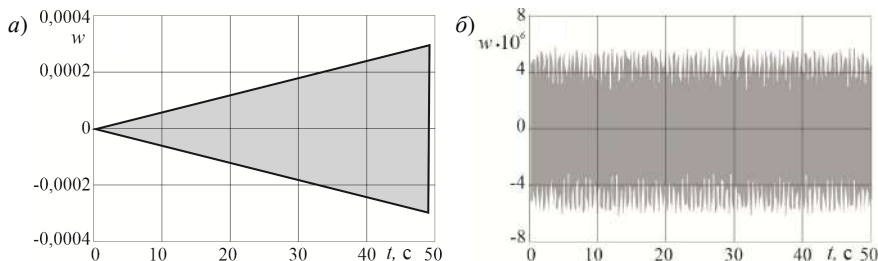


Рисунок 2 – Изменение прогиба во времени при резонансе по ω_0 (а) и ω_1 (б)

Выводы. В данной работе рассмотрена методика исследования колебаний сэндвич-стержней с несжимаемым легким наполнителем в области резонанса. Получены уравнения движения и их решение для случая действия гармонической нагрузки. Проведен численный анализ при действии переменной равномерно распределенной нагрузки, показавший, что при «резонансной» нечетной частоте наблюдается ложный резонанс и нарастания амплитуд колебаний не происходит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 2 Плескачевский, Ю. М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1: Свободные колебания / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 4 (5). – С. 48–52.

3 **Starovoitov, E. I.** Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, вып. 1. – С. 69–83.

4 Nonlinear vibration model of sandwich beam with a shear thickening fluid core / W. Li, K. Lin, K. Wang, B. Wang // Journal of Vibration and Control. – 2022. – Vol. 29, is. 21–22. – P. 4959–4971.

5 Theoretical and experimental study of the vibration dynamics of a 3d-printed sandwich beam with an hourglass lattice truss core / Z. Guo, G. Hu, J. Jiang [et al.] // Frontiers in Materials. – 2021. – Vol. 7. – Article 651998. – 10 p.

6 Finite element model for the vibration analysis of sandwich beam with frequency-dependent viscoelastic material core / Z. Huang, X. Wang, N. Wu [et al.] // Materials. – 2019. – Vol. 12, is. 20. – Article 3390. – 15 p.

7 Unified solution for the vibration analysis of lattice sandwich beams with general elastic supports / Y. Jin, R. Yang, H. Liu [et al.] // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11, is. 19. – Article 9141. – 28 p.

8 **Hodaiei, M. A.** Design guidelines for vibration energy dissipation in three-layer sandwich cantilever beams / M. A. Hodaiei, H. R. Hamidzadeh // ASME Open Journal Engineering. – 2024. – Vol. 3. – Article 031032. – 7 p.

9 **Russillo, F.** Free and forced vibrations of damped locally-resonant sandwich beams / F. Russillo, G. Failla, F. Fraternali // European Journal of Mechanics. A/Solids. – 2021. – Vol. 86. – Article 104188. – 25 p.

10 Effect of the normal transverse stress on the superharmonic resonance problem of three layered sandwich beams with viscoelastic core / M. A. Al-Osta, H. Youzera, S. A. Meftah [et al.] // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2024. – Vol. 12, is. 4. – P. 6185–6196.

11 **Леоненко, Д. В.** Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

12 **Леоненко, Д. В.** Собственные колебания сэндвич-стержня с легким наполнителем / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 100–105.

13 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

14 **Старовойтов, Э. И.** Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

RESONANT VIBRATIONS OF A SANDWICH ROD WITH A LIGHTWEIGHT CORE

Forced vibrations of a sandwich rod with clamped ends are considered. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, a system of differential equations of motion is derived for the case in which the deformation of the outer layers is described by the Bernoulli model, and that of the inner layer by the Timoshenko model. The solution to the system is obtained by series expansion. A numerical analysis is performed for the case of a uniformly distributed harmonic resonant load.

Keywords: sandwich rod, resonance, lightweight core.

Получено 01.09.2025

УДК 629.463.3:532.5

А. А. МАРКАВЦОВ^{1,2}

¹Конструкторско-технический центр Белорусской железной дороги, Минск, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЖИДКИХ ГРУЗОВ В ЖЕСТКИХ И ЭЛАСТИЧНЫХ ЕМКОСТЯХ

Рассмотрены особенности подходов, применяемых при анализе динамики жидкостей, транспортируемых в жестких конструкциях (железнодорожные и автомобильные цистерны, танк-контейнеры) и эластичных емкостях (флекситанках). Обоснована целесообразность применения численных методов для моделирования системы «жидкость – мягкая оболочка – жесткий контейнер».

Ключевые слова: динамика жидких грузов, флекситанк, колебания жидкости, численное моделирование, прочность контейнера.

Традиционно для перевозки жидкостей используют жесткие конструкции: железнодорожные цистерны, автоцистерны и танк-контейнеры (ISO-танки). Главное отличие жидкого груза от твердого заключается в его подвижности: во время увеличения скорости, торможения или поворота транспортного средства жидкость смещается относительно емкости, что создает дополнительные силы инерции, которые могут привести к нарушению целостности железнодорожного подвижного состава, опрокидыванию автомобиля или разрушению самой емкости [1].

В отличие от закрепленного твердого груза вследствие наличия свободной поверхности жидкость реагирует на любые маневры транспортного средства перемещением своего центра масс. При совпадении частоты внешнего воздействия (например, вызывающего раскачивание вагона или автомобиля) с собственной частотой колебаний жидкости возникает явление резонанса. В этом режиме резко возрастает амплитуда волн внутри резервуара, что приводит к появлению значительных динамических нагрузок на стенки емкости и может вызвать потерю устойчивости транспортного средства [1, 5], а также создает прямую угрозу целостности несущего контейнера.

Конструкция стандартного ISO-модуля рассчитана преимущественно на вертикальные нагрузки (штабелирование), но имеет малую жесткость боковых стенок и дверей. При продольном ударе объем жидкости через мягкую оболочку давит на торцы контейнера. Возникает эффект «выпучивания»: стенки деформируются наружу, выходя за допустимые габариты, а запорные механизмы дверей испытывают критические перегрузки, что нередко приводит к их разрушению [3, 4].

С развитием мультимодальных перевозок всё большее распространение получают флекситанки [2], представляющие собой эластичный полимерный вкладыш, устанавливаемый внутрь стандартного двадцатифутового контейнера. Ключевой проблемой безопасности при использовании флекситанков является риск повреждения контейнера. Стандартный сухогрузный модуль конструктивно не рассчитан на интенсивные распирающие нагрузки изнутри. При резком торможении или сильной качке гидродинамический удар («волна») способен привести к деформированию торцевых и боковых стенок контейнера и выходу из строя запорных механизмов дверей [3, 4].

Целью данной работы является сравнительный анализ подходов к исследованию динамики систем, предназначенных для транспортировки жидкостей, при использовании емкостей различной жесткости.

В настоящее время анализ динамики транспортируемых жидких грузов является одной из самых сложных задач с аналитической точки зрения. Прямое численное моделирование движения жидкости требует значительных вычислительных ресурсов, поэтому в современной инженерной практике сохраняется актуальность метода механических аналогов. Суть подхода заключается в замене сложной гидродинамической системы эквивалентной механической схемой, например, пружинно-массовыми аналогами (рисунок 1). Часть груза условно принимается неподвижной, а подвижная масса моделируется в виде математического маятника или пружинно-массового осциллятора. Параметры такой модели (массу подвижного элемента, жесткость пружины или длину подвеса) подбирают таким образом, чтобы совпадали собственные частоты колебаний аналога и реальной жидкости [6].

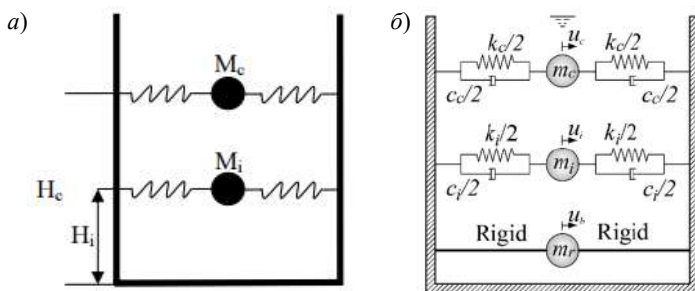


Рисунок 1 – Примеры пружинно-массовых моделей жидкостей:
а – без демпфера (гасителя колебаний) [7]; *б* – с демпфером [8]

Характер силового воздействия жидкости на резервуар зависит от вида транспорта. Для железнодорожных цистерн критическим расчетным случаем являются продольные инерционные нагрузки, возникающие при соударении вагонов во время маневровых работ [9]. В момент удара жидкость сохраняет

скорость движения и воздействует на днище котла, создавая значительные локальные давления. В случае автомобильных перевозок определяющим фактором является поперечная динамика. При прохождении поворотов жидкость смещается к внешней стенке цистерны, создавая дополнительный опрокидывающий момент. Анализ динамики автопоездов показывает, что при частичном заполнении цистерны порог устойчивости против опрокидывания существенно снижается по сравнению с перевозкой твердого груза аналогичной массы [10].

Одним из способов демпфирования колебаний жидкостей внутри жестких резервуаров является установка внутренних перегородок [11–16], как показано на рисунке 2. Их наличие позволяет разделить объем жидкости на области меньшего размера, тем самым увеличивая диссипацию кинетической энергии колебаний, которая возникает вследствие вихреобразования и гидравлического сопротивления. Наличие жестких стенок и волногасителей делает поведение системы предсказуемым, что принципиально отличает ее от мягких оболочек (флекситанков), где реализация подобных технических решений может привести к повышению стоимости изготовления.

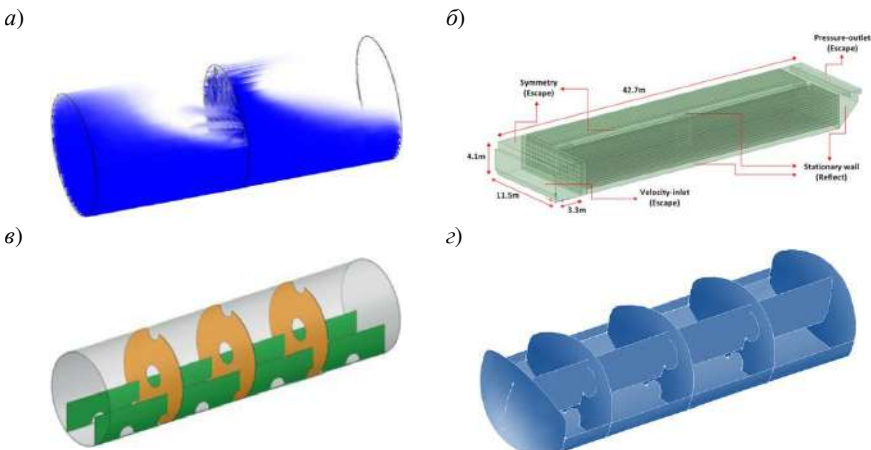


Рисунок 2 – Перегородки, устанавливаемые в жестких резервуарах для гашения колебаний жидких грузов:

а – поперечная [12]; б – продольные [13]; в, г – комбинированные варианты [14, 15]

В жестких резервуарах геометрия стенок с течением времени не изменяется, поэтому при исследованиях рассматривается взаимодействие жидкости с абсолютно твердым телом. Расчет подобных конструкций сводится к анализу двух критериев: прочности обечайки (котла) при продольных ударных нагрузках и поперечной устойчивости для предотвращения опрокидывания на

криволинейных участках пути, которые могут быть выполнены как с использованием аналитических моделей, так и путем расчетов в таких специализированных пакетах инженерного анализа, как, например, ANSYS.

В отличие от жестких резервуаров флекситанк представляет собой мягкую оболочку объемом от 14 000 до 26 000 литров, которая не имеет собственного каркаса и внутренних перегородок-волнорезов [17, 18]. Его конструкция состоит из нескольких внутренних слоев полиэтилена и внешнего защитного каркаса из высокопрочного тканого полипропилена. Такая структура позволяет материалу эффективно поглощать и перераспределять внутренние напряжения, возникающие при движении жидкости. Для предотвращения механических повреждений эластичной оболочки используется внутреннее покрытие. Пол и боковые стенки контейнера облицовываются гофрированным картоном или листовым полипропиленом. Это создает защитный барьер, исключая абразивный износ и проколы флекситанка о неровности контейнера.

Флекситанк не имеет собственного жесткого каркаса, поэтому его форма определяется характеристиками перевозимого жидкого груза (таблица 1) и конструкцией внутренних стенок контейнера (рисунок 3).

Таблица 1 – Классификация жидких грузов, перевозимых во флекситанках

Категория	Номенклатура
<i>1 Пищевые продукты</i>	
Растительные масла и жиры	Подсолнечное, оливковое, пальмовое (рафинированное), соевое, кукурузное, рапсовое, арахисовое, кокосовое масла, масло рисовых отрубей, животные и рыбы жиры
Напитки и концентраты	Вина и виноматериалы, фруктовые соки, концентраты соков, минеральная вода, молоко
Сиропы и добавки	Глюкозно-фруктозные сиропы, патока, жидкий сахар, сорбит, натуральные подсластители, томатная паста, соусы
<i>2 Промышленные масла и горюче-смазочные материалы</i>	
Технические масла	Базовые масла, трансформаторные и белые масла, гидравлические жидкости
Смазочные материалы	Моторные и трансмиссионные масла, смазки, присадки
Биотопливо и сырье	БИО-дизель, отработанные растительные масла (UCO), жирные кислоты, глицерин
<i>3 Неопасная химия</i>	
Полимеры и эмульсии	Натуральный и синтетический латекс, полиолы, парафиновые эмульсии
Промышленная химия	Гликоли (антифризы), пластификаторы, моющие средства (ПАВ), жидкие удобрения, силикаты
Лакокрасочные и строительные материалы	Печатные краски на водной основе, жидкий битум (требует термоизоляции), покрытия

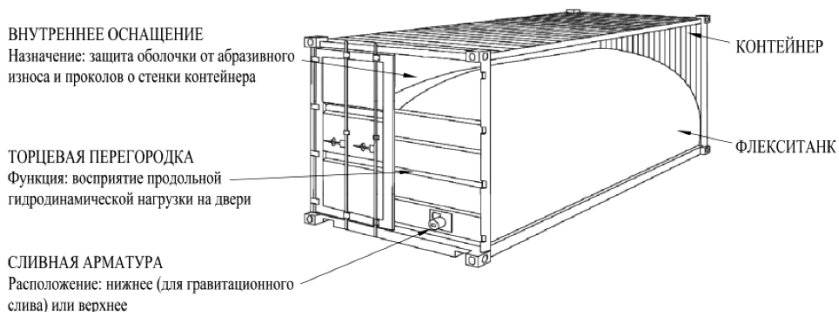


Рисунок 3 – Принципиальная конструкция флекситанка, устанавливаемого в стандартный двадцатифутовый контейнер [17]

В качестве внешней оболочки флекситанка используется стандартный 20-футовый контейнер с грузоподъемностью до 24 тонн. Особое внимание уделяется жесткости конструкции: гофрированные стенки помогают воспринимать распирающие нагрузки, а двери оснащаются двойными запорными штангами для обеспечения максимальной устойчивости торцевой части.

Критически важным элементом безопасности является торцевая перегородка, расположенная у дверей. Она представляет собой комбинированную конструкцию из картона или пластика, усиленную пятью поперечными металлическими балками, основная задача которой – принимать на себя продольные гидродинамические нагрузки, предотвращая давление груза непосредственно на двери контейнера.

Гашение энергии колебаний жидкости в такой системе происходит за счет вязкоупругой деформации самой оболочки и ее трения о пол и стенки контейнера. Здесь возникает сложная задача взаимодействия жидкости и конструкции (Fluid-Structure Interaction – FSI), где форма емкости постоянно меняется под действием волн. Применять к флекситанкам методы расчета, разработанные для жестких цистерн, некорректно, так как они не учитывают подвижность материала и изменение геометрии резервуара в процессе движения [19].

При движении флекситанка происходит волновое возмущение жидкости, которое непосредственно передается на оболочку, вызывая ее деформацию. Изменившаяся геометрия оболочки, в свою очередь, меняет граничные условия для жидкости [20]. В отличие от жестких резервуаров, где энергия колебаний жидкого груза расходуется на преодоление гидравлического сопротивления внутренних перегородок, во флекситанках диссипация энергии происходит за счет вязкоупругого растяжения материала вкладыша и сил трения оболочки о пол и стенки контейнера. Этот процесс имеет ярко выраженный нелинейный характер, что делает невозможным применение простых аналитических формул.

Описанный выше метод механических аналогов показывает высокую эффективность при условии неизменяемости формы сосуда [6]. Однако для

анализа динамики флекситанков с транспортируемой жидкостью указанный подход применять некорректно, поскольку он не учитывает изменение формы самой емкости. Если классический расчет предполагает, что жидкость колеблется внутри жесткого сосуда с неизменными границами, то во флекситанке процесс протекает иначе. При резком торможении жидкость накатывает на переднюю стенку, вызывая ее локальное вздутие. Оболочка растягивается спереди и опадает сзади. Поскольку геометрия резервуара постоянно меняется, описать это движение, используя модель простой колебательной системы невозможно. Например, моделирование жидкости математическим маятником с фиксированной длиной подвеса приводит к значительным погрешностям, занижая реальные нагрузки на конструкцию контейнера.

Моделирование перетекания жидкостей в гибких емкостях требует решения задач гидроупругости (FSI), то есть совместного решения уравнений движения жидкости и деформирования конструкции. В данный момент для этого применяются два основных подхода: сеточные методы и методы динамики сглаженных частиц (SPH) (рисунок 4).

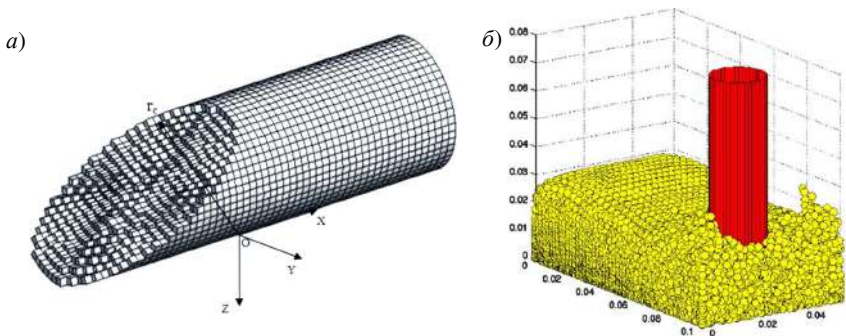


Рисунок 4 – Пример моделирования динамики жидкости в емкостях методами конечных объемов (элементов) (а) [15] и сглаженных частиц (SPH) (б) [26]

Классическим способом решения задач гидродинамики является использование расчетной сетки (методы конечных объемов или конечных элементов) [21, 22]. Чтобы учесть движение стенок резервуара применяют метод Эйлера – Лагранжа. В этом случае узлы сетки смещаются вслед за деформацией границ жидкости.

Однако при расчете флекситанков данный метод сталкивается с техническими трудностями. Из-за высокой эластичности материала оболочка испытывает большие перемещения, что приводит к чрезмерному растяжению и перекручиванию ячеек расчетной сетки. Критическое искажение сетки вызывает ошибки вычислений и часто приводит к аварийной остановке решения. Для продолжения расчета требуется постоянное перестроение сетки, что существенно усложняет алгоритм и увеличивает время моделирования [23].

Альтернативой сеточным алгоритмам выступают бессеточные методы, среди которых наибольшее распространение получил метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics). В рамках этого подхода жидкость представляется не как сплошная среда в ячейках, а как совокупность дискретных частиц, взаимодействующих друг с другом [24, 25].

Для задач с флекситанками метод SPH имеет принципиальные преимущества. Поскольку между частицами нет жестких связей (сетки), метод естественным образом описывает любые, даже самые сильные деформации и разбрызгивание жидкости (рисунок 3). Частицы свободно перемещаются внутри деформируемой оболочки, корректно передавая давление на стенки контейнера. Именно поэтому связку SPH (для жидкости) + метод конечных элементов (для контейнера) можно считать наиболее точным способом прогнозирования прочности транспортируемой системы.

Таким образом, на основании выполненного анализа можно сделать следующие выводы.

1 Вопросы динамики гибких емкостей проработаны недостаточно полно. Существующая теоретическая база не позволяет достоверно оценить влияние относительного смещения жидкости во флекситанке на напряженно-деформированное состояние стенок стандартного контейнера, что затрудняет прогнозирование его прочности.

2 Установлено, что механика движения жидкости во флекситанках отличается от процессов в жестких резервуарах. Если в цистернах колебания ограничиваются жесткими стенками и волногасителями, то во флекситанках реализуется сложное гидроупругое взаимодействие, где энергия гасится за счет деформации оболочки и трения.

3 Показано, что традиционные методы расчета, базирующиеся на механических аналогах (маятниковых моделях), неэффективны для эластичных емкостей. Игнорирование изменения геометрии резервуара и перераспределения масс при торможении («эффект растекания») может привести к существенным отклонениям.

4 Основным риском эксплуатации флекситанков является не неразрывность самой оболочки, а прочность стандартного ISO-контейнера. Доказано, что гидродинамические удары вызывают интенсивные распирающие нагрузки, приводящие к выпучиванию боковых стенок и разрушению запорных механизмов дверей, конструктивно не рассчитанных на внутреннее давление.

5 Анализ современных подходов к моделированию выявил преимущества бессеточных методов перед сеточными алгоритмами. В условиях больших деформаций оболочки наиболее точным инструментом прогнозирования является метод сглаженных частиц в связке с методом конечных элементов. Именно этот подход позволяет корректно описать поведение системы «жидкость – мягкая оболочка – жесткий контейнер» и может быть использован для проведения дальнейших исследований в области прочности гибких емкостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Ibrahim, R. A.** Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications / R. A. Ibrahim. – Cambridge : Cambridge University Press, 2005. – 970 p.

2 **Машков, А. С.** Безопасный экспорт из России в Китай наливных грузов во флекситанках / А. С. Машков, Д. В. Ушаков // Форум молодых ученых. – 2021. – № 6 (58). – С. 505–508.

3 Flexible Tanks for Liquid Bulk Cargo : Recommended Best Practices / International Union of Marine Insurance (IUMI). – 2024. – URL: <https://iumi.com/wp-content/uploads/2025/01/Flexible-Tanks-for-Liquid-Bulk-Cargo-Recommended-Best-Practices.pdf> (дата обращения: 01.10.2025).

4 Report on the investigation into Flexitanks carried out by Germanischer Lloyd and commissioned by the GDV / Berlin : GDV. – URL: https://www.tis-gdv.de/wp-content/uploads/tis_e/containe/flexitanks/flexitankuntersuch.pdf (дата обращения: 01.10.2025).

5 **Goudarzi, M. A.** Investigation of nonlinear sloshing effects in seismically excited tanks / M. A. Goudarzi, S. R. Sabbagh-Yazdi // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2012. – Vol. 43. – P. 355–365.

6 **Farid, M.** Internal resonances and dynamic responses in equivalent mechanical model of partially liquid-filled vessel / M. Farid, O. V. Gendelman // Journal of Sound and Vibration. – 2016. – Vol. 379. – P. 191–212.

7 **Kalantari, A.** Applicability of mass-spring models for seismically isolated liquid storage tanks / A. Kalantari, M. R. Nikoomanesh, M. A. Goudarzi // Journal of Earthquake and Tsunami. – 2019. – Vol. 13, is. 1. – Article 1950002. – 17 p.

8 Seismic response of a cylindrical liquid storage tank with elastomeric bearing isolations resting on a soil foundation / X. Meng, Y. Sun, C. Wang [et al.] // Infrastructures. – 2025. – Vol. 10, is. 6. – 18 p.

9 **Wang, Z.** Study on impact process of a large LNG tank container for trains / Z. Wang, C. Qian, W. Li // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13, is. 3. – Article 1351. – 19 p.

10 Theory and experiments on driving stability of tank trucks under dangerous working conditions / D. Yu, X. Li, H. Liu [et al.] // Journal of Vibroengineering. – 2015. – Vol. 17, is. 5. – P. 2521–2534.

11 **Gegedesh, M.** Effectiveness evaluation of the liquid cargo oscillations damping in partially filled reservoirs of agricultural vehicles based on computer simulation / M. Gegedesh, G. Koshlya // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2624. – Article 030081. – 7 p.

12 **Kuzniatsova, M.** 3D modeling of liquid oscillations in reservoirs with perforated baffles / M. Kuzniatsova // Technol. – 2013. – Vol. 5, is. 4. – P. 171–174.

13 **Hurom, K.** Examining the effects of longitudinal inclined plates and perforated inlet baffle on the settling efficiency of a rectangular sedimentation tank: A computational fluid dynamics study / K. Hurom, T. Davi // Water, Air and Soil Pollution. – 2024. – Vol. 235, is. 1. – Article 73.

14 Designing baffles of fuel tanker truck to prevent rollovers / N. Ahmad, M. Varshney, M. Haani Farooqi, U. Khan // Ergonomics for Improved Productivity. – Singapore : Springer, 2021. – P. 671–678.

15 **Dasgupta, A.** Effect of Tank Cross-Section and Longitudinal Baffles on Transient Liquid Slosh in Partly-Filled Road Tankers : Master Thesis (Mechanical Engineering) / A. Dasgupta. – Montreal : Concordia University, 2011. – 100 p.

16 **Kuzniatsova, M. G.** Comparative analysis of forms of lateral baffles for road tanks / M. G. Kuzniatsova, A. O. Shimanovsky // *Applied Mechanics and Materials*. – 2015. – Vol. 797. – P. 290–298.

17 Flexitank. – Tancomed S.A. – URL: <https://tancomed.com/flexitank> (дата обращения: 01.10.2025).

18 BLT flexitank offers cost-effective, efficient, and eco-friendly liquid transport. – Qingdao BLT Flexitank Solution Co., Ltd. – URL: <https://bltflexitank.com/products/> (дата обращения: 01.10.2025).

19 **Маркавцов, А. А.** Использование контейнеров с установленными гибкими емкостями для перевозки жидких грузов / А. А. Маркавцов // МИТРО 2024 – Машиностроение. Инновации. Технологии. Робототехника : материалы докл. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2024. – С. 136–137.

20 **Nicolici, S.** Fluid structure interaction modeling of liquid sloshing phenomena in flexible tanks / S. Nicolici, R. M. Bilegan // *Nuclear Engineering and Design*. – 2013. – Vol. 258. – P. 51–56.

21 **Hou, G.** Numerical methods for fluid-structure interaction – A review / G. Hou, J. Wang, A. Layton // *Communications in Computational Physics*. – 2012. – Vol. 12, is. 2. – P. 337–377.

22 **Иванов, В. В.** Конечно-элементное моделирование поведения резервуаров с учетом конвективной массы жидкости при сейсмических воздействиях от массовых промышленных взрывов / В. В. Иванов, А. Г. Новиньков, С. И. Протасов // *Вестник Кузбасского государственного технического университета*. – 2004. – № 3. – С. 13–16.

23 Extended ALE Method for fluid-structure interaction problems with large structural displacements / S. Basting, A. Quaini, S. Čanić, R. Glowinski // *Journal of Computational Physics*. – 2017. – Vol. 331. – P. 312–336.

24 A novel smoothed particle hydrodynamics and finite element coupling scheme for fluid-structure interaction: The sliding boundary particle approach / S. L. Fuchs, C. Meier, W. A. Wall, C. J. Cyron // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2021. – Vol. 383. – Art. 113922.

25 **Yao, X.** An improved SPH-FEM coupling approach for modeling fluid-structure interaction problems / X. Yao, X. Zhang, D. Huang // *Computational Particle Mechanics*. – 2023. – Vol. 10, is. 2. – P. 313–330.

26 Variational formulation for the smooth particle hydrodynamics (SPH) simulation of fluid and solid problems / J. Bonet, S. Kulasegaram, M. X. Rodriguez-Paz, M. Profit // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2004. – Vol. 193, is. 12–14. – P. 1245–1256.

A. A. *MARKAVTSOV*^{1, 2}

¹*Design and Technical Center of the Belarusian Railway, Minsk, Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

APPROACHES TO ANALYZING THE DYNAMICS OF TRANSPORT SYSTEMS FOR LIQUID CARGO IN RIGID AND FLEXIBLE CONTAINERS

The approaches used to analyze the dynamics of liquids transported in rigid structures (railway and road tankers, tank containers) and flexible containers (flexitanks) are considered. The feasibility of using numerical methods to model the "liquid – soft shell – rigid container" system is substantiated.

Keywords: liquid cargo dynamics, flexitank, liquid oscillations, numerical modeling, container strength.

Получено 31.10.2025

УДК 539.37

*Д. Е. МАРМЫШ, А. С. ШЕЛЕГ**Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ
В ТЕЛАХ С НЕОДНОРОДНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ**

Рассматривается задача об определении напряженного состояния тела с использованием аналитического граничного элемента, получаемого для случая действия распределенной нагрузки интегрированием фундаментального решения, в качестве которого берется решение Кельвина для сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке упругого пространства. Численно решаются задачи о напряженном состоянии многосвязной области (плоскости с круговым отверстием) и тела с выпукло-вогнутой геометрией (сечение железнодорожного рельса).

Ключевые слова: метод граничных элементов, фундаментальное решение теории упругости, напряженное состояние, численное моделирование, неоднородная геометрия.

Введение. Метод граничных элементов (МГЭ) является одним из популярных и эффективных методов в механике для анализа напряженно-деформированного состояния твердого тела. Основным преимуществом МГЭ, по сравнению с популярными численными методами: конечных элементов, конечных разностей и конечных объемов – является возможность построения расчетной сетки только по границе тела, тем самым на один порядок снижается размерность задачи и уменьшается количество алгебраических уравнений итоговой системы [1].

С другой стороны, для применения МГЭ необходимо наличие фундаментальных решений, которые, во-первых, могут быть получены не для каждой постановки задачи, во-вторых, являются сингулярными. Для того чтобы избежать сингулярности, можно предварительно проинтегрировать фундаментальные решения для равномерно или неравномерно распределенных нагрузок вдоль некоторой конечной области. Как показано в работах [2–4], получаемые аналитические решения не являются сингулярными и могут быть использованы для гранично-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния.

Аналитический граничный элемент (ГЭ). Для решения задач о плоском деформированном состоянии упругой изотропной среды методом граничных элементов в случае выпуклой геометрии тела используют фундаментальное решение Фламана, при невыпуклой геометрии – Кельвина.

Рассмотрим решение Кельвина для плоской деформации под действием сосредоточенной силы $\mathbf{F}(F_x, F_y)$, приложенной вдоль оси Oy упругой изотропной среды, вводя функцию [5]

$$g(x, y) = -\frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi(1-\mu)},$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Компоненты напряжений получим по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^F &= F_x \left[2(1-\mu) g_{,x} - x g_{,xx} \right] + F_y \left(2\mu g_{,y} - y g_{,yy} \right); \\ \sigma_{yy}^F &= F_x \left(2\mu g_{,x} - x g_{,xx} \right) + F_y \left[2(1-\mu) g_{,y} - y g_{,yy} \right]; \\ \sigma_{xy}^F &= F_x \left[(1-2\mu) g_{,y} - x g_{,xy} \right] + F_y \left[(1-2\mu) g_{,x} - y g_{,xy} \right],\end{aligned}\quad (1)$$

где $g_{,x} = \partial g / \partial x$, $g_{,y} = \partial g / \partial y$.

При действии распределенной нагрузки аналитические выражения для компонент напряжений получаем интегрированием выражений (1). Запишем эти выражения для случая действия равномерной нагрузки $\mathbf{P}(q_0, p_0)$, распределенной вдоль отрезка $[-a, a]$ оси Ox :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{q_0}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (3-2\mu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right] + \\ &+ \frac{p_0 y}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2} - \frac{2\mu}{y} (\theta_1 + \theta_2) \right]; \\ \sigma_{yy} &= \frac{q_0}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - (1-2\mu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right] + \\ &+ \frac{p_0 y}{4\pi(1-\mu)} \left[-\frac{a-x}{r_1^2} - \frac{a+x}{r_2^2} - \frac{2(1-\mu)}{y} (\theta_1 + \theta_2) \right]; \\ \sigma_{xy} &= \frac{q_0}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (1-2\mu) (\theta_1 + \theta_2) + \ln \frac{r_1}{r_2} \right] + \\ &+ \frac{p_0 y}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + (1-2\mu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right],\end{aligned}\quad (2)$$

где $r_{1,2}^2 = (a \mp x)^2 + y^2$, $\theta_{1,2} = \arctg \frac{a \mp x}{y}$.

Выражения (2) не являются сингулярными и определяют напряжения в любой точке бесконечного пространства (x, y) . Напряжения в локальной системе координат (\bar{x}, \bar{y}) граничного элемента с центром в точке (c_x, c_y) и ориентированного под углом β к системе (x, y) получаются путем подстановки формул для преобразования координат:

$$\bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta; \quad \bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta$$

в выражения (2).

При реализации метода фиктивных нагрузок воспользуемся системой уравнений [3, 5]

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{k=1}^N A_{ss}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N A_{sn}^{ik} P_n^k; \\ \sigma_n^i = \sum_{k=1}^N A_{ns}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N A_{nn}^{ik} P_n^k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3)$$

где N – количество граничных элементов, на которое разбита кривая, ограничивающая рассматриваемую область; $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$ – соответственно, фиктивные касательные и нормальные напряжения, приложенные к k -му ГЭ; A_{ss}^{ik}, \dots – граничные коэффициенты влияния напряжений, определяемые из (2) для действия единичных усилий, которые распределены вдоль k -го ГЭ.

Система уравнений (3) решается относительно неизвестных фиктивных нагрузок $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$, которые не равны действительным напряжениям σ_s^k и σ_n^k , возникающим при действии приложенных граничных условий на всех N элементах граничной кривой.

Численный эксперимент. Рассмотрим задачу Кирша об одноосном растяжении усилиями p бесконечной упругой пластины с круглым отверстием радиуса a . Аналитическое решение этой задачи для случая полярных координат (r, θ) можно найти в [5–7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{P}{2}(1 - \alpha^2) + \frac{P}{2}(1 - 4\alpha^2 + 3\alpha^4) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{2}(1 + \alpha^2) - \frac{P}{2}(1 + 3\alpha^4) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r,\theta} &= -\frac{P}{2}(1 + 2\alpha^2 - 3\alpha^4) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha = a/r$.

Схема, иллюстрирующая численное решение задачи Кирша, представлена на рисунке 1. Напряжения, действующие на каждом граничном элементе,

$$\sigma_s^i = -\frac{P}{2} \sin 2\theta_i; \quad \sigma_n^i = \frac{P}{2} (1 + \cos 2\theta_i). \quad (5)$$

Как видно из рисунка 1, круговое отверстие разбивалось на 12 одинаковых ГЭ, для которых по формулам (5) определялись значения касательных и нормальных напряжений на границе. Обход контура кругового отверстия производится против часовой стрелки. Подставляя (5) в (3), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора фиктивных нагрузок $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$ на каждом граничном элементе:

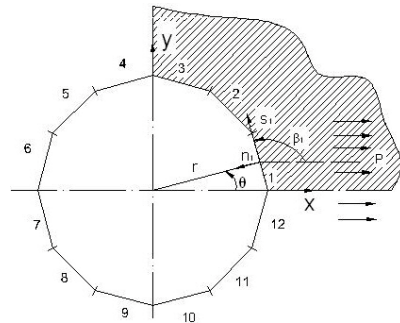


Рисунок 1 – Схема для численного решения задачи Кирша

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} \sin 2\theta_i = \sum_{k=1}^{12} A_{ss}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^{12} A_{sn}^{ik} P_n^k; \\ \frac{p}{2} (1 + \cos 2\theta_i) = \sum_{k=1}^{12} A_{ns}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^{12} A_{nn}^{ik} P_n^k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 12).$$

На рисунке 2 представлено сравнение численного (точки) и аналитического (сплошная линия) решений для радиальных и касательных напряжений при угле $\theta = 15^\circ$ в (4) и коэффициенте Пуассона $\mu = 0,33$ в (2).

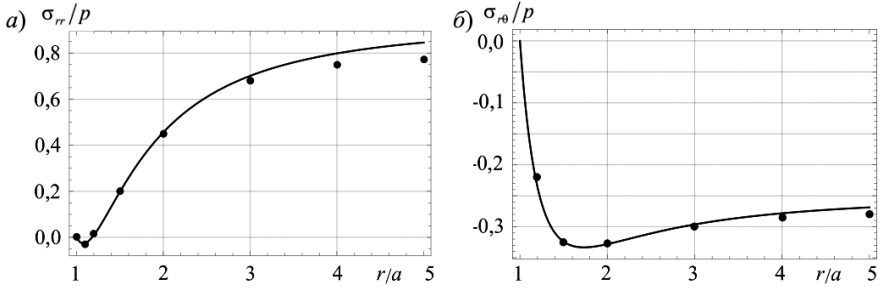


Рисунок 2 – Радиальные (а) и касательные (б) напряжения

Отметим, что из выражений (4) при угле $\theta = 15^\circ$ на бесконечности, то есть при $a = r \rightarrow 0$, следует, что

$$\sigma_{rr}/p = 0,5 + 0,25\sqrt{3}; \quad \sigma_{\theta\theta}/p = 0,5 - 0,25\sqrt{3}; \quad \sigma_{r0}/p = -0,25.$$

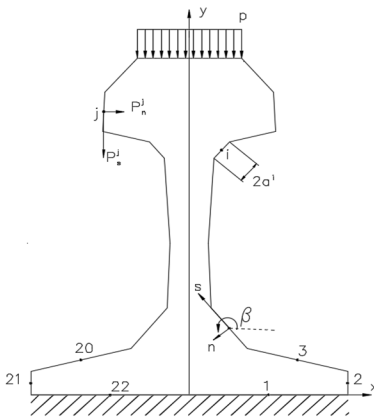


Рисунок 3 – Схема для численного решения задачи о напряженном состоянии сечения рельса

Напряженное состояние сечения рельса. Как уже было отмечено выше, фундаментальное решение Кельвина (1), соответственно, и его модификация для аналитического граничного элемента может быть использована для тел, геометрия которых не является выпуклой. Именно такой геометрией обладает сечение железнодорожного рельса, гранично-элементное моделирование напряженного состояния которого рассмотрим. На рисунке 3 изображена расчетная схема к задаче с гранично-элементной сеткой по контуру рельса. Геометрические размеры взяты для рельса Р65 [8].

Как видно из приведенной схемы, гранично-элементная сетка является неоднородной и состоит из 22 элементов. Кроме

того, граничные условия являются смешанными: верхний контур рельса нагружен равномерно распределенной нагрузкой, направленной по нормали к контуру, нижний контур рельса жестко закреплен. Граничные условия в терминах перемещений приводят к необходимости использований также и фундаментальных решений для перемещений среды в задаче Кельвина [5]:

$$\begin{aligned} u_x^F &= \frac{F_x}{2G} [(3-4\mu)g - xg_{,x}] + \frac{F_y}{2G} (-yg_{,x}); \\ u_y^F &= \frac{F_x}{2G} (-xg_{,y}) + \frac{F_y}{2G} [(3-4\mu)g - yg_{,y}], \end{aligned} \quad (6)$$

где G – модуль сдвига.

Интегрирование решений (6) для равномерно распределенных касательных q_0 и нормальных нагрузок p_0 вдоль отрезка $|x| \leq a$ приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{q_0}{8\pi(1-\mu)G} \left\{ -8(1-\mu)a + 4(1-\mu)(\theta_1 + \theta_2)y + \right. \\ &+ (3-4\mu) \left[(a-x)\ln r_1 + (a+x)\ln r_2 \right] \left. - \frac{P_0 y}{8\pi(1-\mu)G} \ln \frac{r_1}{r_2} \right\}; \\ u_y &= -\frac{q_0}{8\pi(1-\mu)G} \left\{ -2(3-4\mu)a + 2(1-2\mu)(\theta_1 + \theta_2)y + \right. \\ &+ (3-4\mu) \left[(a-x)\ln r_1 + (a+x)\ln r_2 \right] \left. - \frac{P_0 y}{8\pi(1-\mu)G} \ln \frac{r_1}{r_2} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учет граничных условий в перемещениях аналогичен учету в напряжениях с той лишь разницей, что в системе уравнений, аналогичной (3),

$$\begin{cases} u_s^i = \sum_{k=1}^N B_{ss}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N B_{sn}^{ik} P_n^k; \\ u_n^i = \sum_{k=1}^N B_{ns}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N B_{nn}^{ik} P_n^k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8)$$

в качестве граничных коэффициентов влияния напряжений A_{ss}^{ik}, \dots берутся коэффициенты влияния перемещений B_{ss}^{ik}, \dots , получаемые из (7).

Таким образом, для нахождения неизвестных фиктивных нагрузок $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$ решают совместно системы уравнений (3) и (8), число которых в общем случае разбиения граничной кривой на N элементов, должно быть $2N$.

Как видно из рисунка 3, нижний контур рельса представлен двумя граничными элементами с номерами 1 и 22, соответственно, граничные условия в перемещениях в (8) будут иметь вид

$$u_s^1 = u_s^{22} = 0 \quad \text{и} \quad u_n^1 = u_n^{22} = 0.$$

На рисунке 4 показаны результаты гранично-элементного моделирования распределения нормальных напряжений σ_{xx} и σ_{yy} (отнесенных к величине прикладываемой нагрузки p) вдоль оси y ($x = 0$) по высоте сечения рельса от 0 до 180 мм.

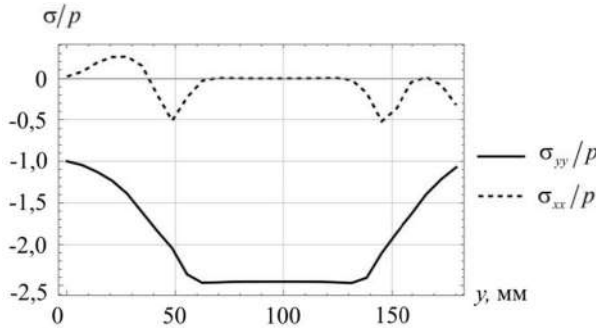


Рисунок 4 – Нормальные напряжения в сечении рельса

В процессе эксплуатации железнодорожного рельса крайне важным фактором, влияющим на напряженно-деформированное состояние пары «колесо – рельс», является трение между контактирующими телами. Для учета касательных нагрузок q , действующих на верхний контур сечения рельса, используем закон Кулона с коэффициентом трения $f = 0,3$ [9], поэтому

$$q = fp = 0,3p.$$

В данной работе коэффициент трения между рельсом и колесом принят постоянным, что является упрощением. В действительности коэффициент трения в системе зависит от характеристик материалов контактирующих тел и параметров нагружения. Соответствующие исследования можно найти, например, в работах [10, 11].

На рисунке 5 показаны результаты гранично-элементного моделирования относительных нормальных σ_{xx}/p и касательных σ_{xy}/p напряжений по высоте сечения рельса вдоль оси y ($x = 0$). Касательная нагрузка прикладывалась по верхнему контуру рельса в сторону положительного направления оси x . Действие касательного нагружения не влияет существенным образом на изменение нормального напряжения σ_{xx} вдоль оси y . В случае только нормального нагружения сечения рельса усилиями p ось y является осью симметрии, соответственно, нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{yy} являются главными напряжениями вдоль оси y , а касательные напряжения $\sigma_{xy} = 0$. Отметим, однако, что равенство нулю касательных напряжений вдоль оси симметрии является теоретическим. При численном моделировании из-за аппроксимационных и вычислительных погрешностей касательные напряжения могут быть отличны от

нуля, тем не менее значения σ_{xy} должны быть значительно меньше величины прикладываемой нагрузки p .

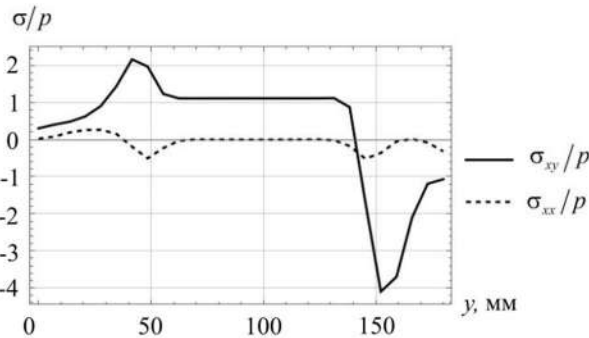


Рисунок 5 – Нормальное и касательное напряжения в сечении рельса при учете касательной составляющей нагружения

Из рисунка 5 видно, что при наличии трения в системе «железнодорожное колесо – рельс», касательные напряжения являются знакопеременными, причем в абсолютном выражении значения возрастают более чем в 10 раз по сравнению с величиной нормального внешнего давления p . Здесь также отметим, что использование аналитического граничного элемента с функциями влияния, которые не являются сингулярными, позволяет в точности соблюсти граничные на верхнем и нижнем контурах сечения рельса.

Заключение. При реализации гранично-элементного моделирования необходимо наличие фундаментального решения для рассматриваемой среды. В случае изотропной упругой среды фундаментальные решения хорошо известны, однако являются сингулярными. Предварительное интегрирование фундаментальных решений для распределенных нагрузок позволяет получить решения, не являющиеся сингулярными, то есть конечными в любой точке среды. Получаемые таким образом аналитические решения могут быть эффективно использованы для численного решения задач о напряженно-деформированном состоянии твердых деформируемых тел. Основываясь на фундаментальном решении Кельвина для плоского деформированного состояния, можно проводить гранично-элементное моделирование многосвязных тел и/или тел с неоднородной геометрией, в том числе для выпукло-вогнутой геометрии тела, как это показано для сечения рельса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Efficient BEM for thin-walled inhomogeneous potential problems: Theory and MATLAB code / X. Gao, Y. Gu, B. Yu [et al.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2025. – Vol. 176. – Article 106241.

2 **Щербаков, С. С.** Определение трехмерного напряженно-деформированного состояния полупространства при действии эллиптически распределенных нормальных и касательных усилий на основе точных решений для равномерной нагрузки / С. С. Щербаков // Весці НАНБ. Серыя фіз.-тэхн. навук. – 2012. – № 3. – С. 50–56.

3 **Журавков, М. А.** Гранично-элементное моделирование в механике: пособие / М. А. Журавков, А. В. Круподеров, С. С. Щербаков. – Минск : БГУ, 2014. – 174 с.

4 **Li, J.** A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area / J. Li, E. J. Berger // Journal of Elasticity. – 2001. – Vol. 63, is. 2. – P. 137–151.

5 **Крауч, С.** Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

6 **Timoshenko, S. P.** Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 519 p.

7 **Демидов, С. П.** Теория упругости / С. П. Демидов. – М. : Высш. шк., 1979. – 432 с.

8 Рельсы железнодорожные. Общие технические условия : ГОСТ Р 51685-2013. – Введ. 14.10.2013. – М. : Стандартинформ, 2013. – 96 с.

9 **Щербаков, С. С.** Напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость в окрестности контактного взаимодействия в трибофатической системе колесо / рельс с учетом неконтактного деформирования рельса / С. С. Щербаков, О. А. Насань // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 234–247.

10 Исследование зависимости коэффициента трения в системе «рельс – колесо» как функции параметров материала и нагружения / В. Л. Попов, С. Г. Псахье, Е. В. Шилько [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2002. – № 3. – С. 17–25.

11 Зависимость коэффициента трения в зоне контакта системы колесо – рельс от шероховатости взаимодействующих поверхностей / А. М. Керопян, П. М. Вержанский, В. А. Мостаков, Р. К. Басов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2016. – № 11. – С. 80–89.

D. E. MARMYSH, A. S. SHELEG

Belarusian State University, Minsk, Belarus

BOUNDARY ELEMENT MODELING OF STRESSES IN BODIES WITH INHOMOGENEOUS GEOMETRY

The problems of analyzing the body state using an analytical boundary element obtained for the case of a distributed load complex action are solved by a fundamental solution, where the Kelvin solution for a complex force applied in a stable elastic space is adopted. The stressed state problem for the multiply connected domain (a plane with a circular hole) and a body with convex-concave geometry (a railroad rail cross-section) is solved numerically.

Keywords: boundary element method, fundamental solution of elasticity theory, stress state, numerical simulation, non-homogeneous geometry.

Получено 15.10.2025

УДК 539.4.015

О. М. ОСТРИКОВ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ВЛИЯНИЕ ПРИЛЕГАЮЩИХ МИКРОРАЗМЕРНЫХ ЗЕРЕН НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗЕРНА ПОЛИКРИСТАЛЛА С ОСТАТОЧНЫМ КЛИНОВИДНЫМ ДВОЙНИКОМ

Разработана методика расчета полей напряжений в группе зерен поликристалла, одно из которых содержит единичный остаточный клиновидный двойник. В результате расчета с учетом влияния соседних зерен установлено, что максимальные значения напряжений локализуются на границах зерен и двойников.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, остаточный клиновидный двойник, зерно поликристалла.

В технике металлы применяются преимущественно в поликристаллическом состоянии [1–3]. Известно, что поликристаллы включают большое число мелких монокристаллических зерен, разделенных зонами перехода, которые называют границами зерен [4]. Такая граница представляет собой поверхность между двумя монокристаллами различной взаимной кристаллографической ориентации, которые примыкают друг к другу так, что не нарушается сплошность среды [5]. В поликристалле соседние зерна контактируют друг с другом и не могут деформироваться свободно. При этом на свойства металлов в поликристаллическом состоянии существенное влияние оказывает не только размер зерна, но и атомно-кристаллическое строение имеющихся межкристаллитных границ.

Несмотря на большую историю развития представлений о строении и свойствах границ зерен в металлах, исследования по данной тематике применительно к конструкционным сталям ограничены, что не позволяет находить новые решения для дальнейшего улучшения их эксплуатационных свойств. Поэтому практический интерес представляет разработка методик расчета напряженно-деформированного состояния зерен поликристаллов при наличии в них остаточных деформационных двойников, оказывающих существенное влияние на механические характеристики эксплуатационных материалов [2].

Изучение влияния зеренной и зернограницной структуры поликристаллических материалов на напряженно-деформированное состояние, обусловленное единичным двойником, является актуальным. В работах [6–8] разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния сплошной среды, содержащей единичные или множественные остаточные деформационные клиновидные двойники. На данный момент не изучено влияние соседних зерен на деформационную картину в зерне поликристалла с единичным двойником, который является одним из основных каналов пластической деформации.

В данной работе поставлена цель по разработке методики учета влияния соседних зерен на поле напряжений в зерне поликристалла, которое содержит единичный остаточный клиновидный двойник.

На рисунке 1 представлена группа микроразмерных зерен поликристалла, причем находящееся в центре содержит единичный двойник. Зерна приняты шестиугольными, так как данная форма характеризует относительно устойчивую двумерную структуру поликристалла [3, 9].

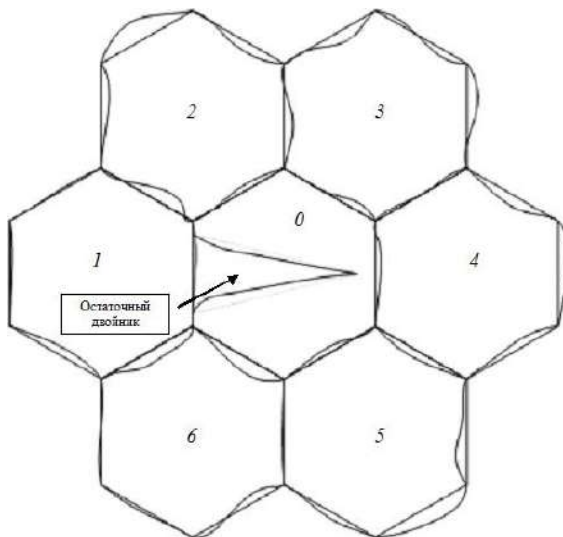


Рисунок 1 – Группа зерен 1–6 вокруг зерна 0 с остаточным двойником

Границы рассматриваемой группы зерен представим в виде стенок полных дислокаций. Для уменьшения громоздкости вычислений учтем только напряжения, создаваемые группой зерен и остаточным клиновидным двойником. Тогда смещения (u_i) и напряжения (σ_i), создаваемые рассматриваемым двойником и обусловленные границами всех рассматриваемых зерен, в соответствии с принципом суперпозиции [7] могут быть определены по формуле

$$\begin{pmatrix} u_i \\ \sigma_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^2 \begin{pmatrix} (u_i^{(m)})_{tw}(x, y) \\ (\sigma_{ij}^{(m)})_{tw}(x, y) \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^g \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} (u_i^{(k)})_{b(r)}(x, y) \\ (\sigma_{ij}^{(k)})_{b(r)}(x, y) \end{pmatrix},$$

где m – номер двойниковой границы; $(u_i^{(m)})_{tw}(x, y)$, $(\sigma_{ij}^{(m)})_{tw}(x, y)$ – смещения и напряжения, создаваемые двойниковыми границами, i, j принимают значения x, y или z ; r – номер зерна; g – количество зерен; k – номер зеренной границы; n – количество зеренных границ (в рассматриваемом случае $n = 6$); $(u_i^{(k)})_{b(r)}(x, y)$, $(\sigma_{ij}^{(k)})_{b(r)}(x, y)$ – смещения и напряжения, создаваемые границами зерен.

Смещения и напряжения, создаваемые остаточным клиновидным двойником, рассчитываются с учетом напряжений и смещений на границах зерен по ранее разработанной в [7] методике.

Плотности дислокаций на всех элементах рассматриваемой системы прием постоянными. При этом на границах зерен плотность дислокаций пусть будет равна $(\rho^{(k)})_{b(r)} = C_1$, а на двойниковых границах – $(\rho^{(m)})_{nv} = C_2$ [10].

Уравнения для формы и положения границ зерен составим исходя того, что зерна имеют форму правильного шестиугольника. Если зерна имеют одинаковый размер, то уравнения формы границ зерен примут вид

– для зерна 0 (см. рисунок 1):

$$f_{b(0)}^{(1)}(y_0) = 0; \quad f_{b(0)}^{(2)}(x_0) = \frac{a}{2} + \frac{x_0}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(0)}^{(k)}(x_0) = f_{b(1)}^{(k-1)}(a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) + \frac{x_0 - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

– для зерна 1 (см. рисунок 1):

$$f_{b(1)}^{(1)}(y_0) = -a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3); \quad f_{b(1)}^{(2)}(x_0) = \frac{a}{2} + \frac{x_0 + a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3)}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(1)}^{(k)}(x_0) = f_{b(2)}^{(k-1)}(-a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) + a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) + \frac{x_0 + a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

– для зерна 2 (см. рисунок 1):

$$f_{b(2)}^{(1)}(y_0) = a \sin \alpha_6; \quad f_{b(2)}^{(2)}(x_0) = \frac{3a}{2} + a \cos \alpha_6 + \frac{x_0 - a \sin \alpha_6}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(2)}^{(k)}(x_0) = f_{b(2)}^{(k-1)}(a \sin \alpha_6 + a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) + \frac{x_0 - a \sin \alpha_6 - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

– для зерна 3 (см. рисунок 1):

$$f_{b(3)}^{(1)}(y_0) = a \sin \alpha_2; \quad f_{b(3)}^{(2)}(x_0) = \frac{3a}{2} + a \cos \alpha_2 + \frac{x_0 - a \sin \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(3)}^{(k)}(x_0) = f_{b(3)}^{(k-1)}(a \sin \alpha_2 + a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) + \frac{x_0 - a \sin \alpha_2 - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

– для зерна 4 (см. рисунок 1):

$$f_{b(4)}^{(1)}(y_0) = a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3); \quad f_{b(4)}^{(2)}(x_0) = \frac{a}{2} + \frac{x_0 - a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3)}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(4)}^{(k)}(x_0) = f_{b(4)}^{(k-1)}(a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) + a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) +$$

$$+ \frac{x_0 - a(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

– для зерна 5 (см. рисунок 1):

$$f_{b(5)}^{(1)}(y_0) = -a \sin \alpha_6; \quad f_{b(5)}^{(2)}(x_0) = -\frac{a}{2} - a \cos \alpha_6 + \frac{x_0 + a \sin \alpha_6}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(5)}^{(k)}(x_0) = f_{b(5)}^{(k-1)}(-a \sin \alpha_6 + a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) +$$

$$+ \frac{x_0 - a \sin \alpha_6 - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

– для зерна 6 (см. рисунок 1):

$$f_{b(6)}^{(1)}(y_0) = -a \sin \alpha_2; \quad f_{b(6)}^{(2)}(x_0) = -\frac{a}{2} - a \cos \alpha_2 + \frac{x_0 + a \sin \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2};$$

$$f_{b(6)}^{(k)}(x_0) = f_{b(6)}^{(k-1)}(-a \sin \alpha_2 + a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})) +$$

$$+ \frac{x_0 + a \sin \alpha_2 - a(\sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{k-1})}{\operatorname{tg} \alpha_k};$$

где a – длина ребра границы зерна; α_k – угол поворота k -й границы зерна рассматриваемой группы относительно вертикали; x_0 и y_0 – текущие координаты. Значения a и α_k определяются по формулам

$$a = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \alpha_k = \pi - \frac{\pi}{3}(k-1),$$

где R – радиус вписанной в зерно окружности.

По аналогии с [7] форму границ остаточного клиновидного двойника опишем функциями

$$f_{nv}^{(1)}(x_0) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right); \quad f_{nv}^{(2)}(x_0) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right),$$

где L – длина двойника; H – его ширина у устья.

Расчеты проводились для железа (Fe) по методике, описанной в [7]. Численные значения параметров принимались такие же, как и в [3]. Результаты расчета полей напряжений приведены на рисунке 2. Из него видно, что поля всех компонент тензора напряжений имеют четко выраженные места концентрации

напряжений: для нормальных σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} и скалывающих σ_{xy} , σ_{yz} и σ_{xz} напряжений – это узловые точки зерен, вершина двойника и двойниковые границы.

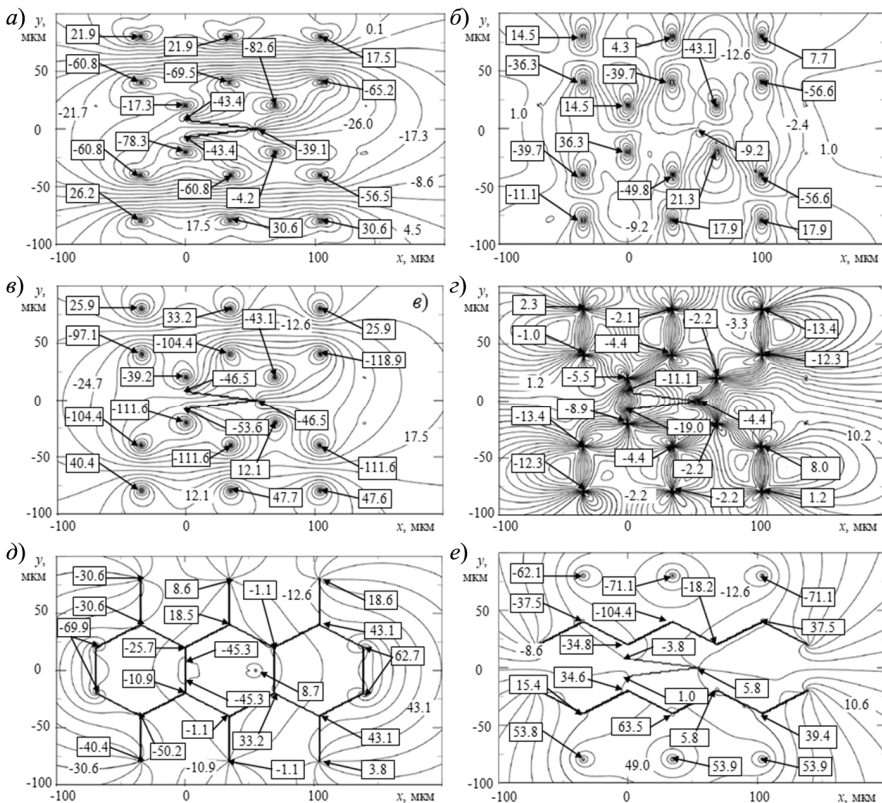


Рисунок 2 – Напряжения, МПа, в группе из семи зерен при наличии в одном из них единичного остаточного клиновидного двойника:

a – для $\sigma_{xx}(x, y)$; *б* – для $\sigma_{yy}(x, y)$; *в* – для $\sigma_{zz}(x, y)$; *г* – для $\sigma_{xy}(x, y)$; *д* – для $\sigma_{yz}(x, y)$; *е* – для $\sigma_{xz}(x, y)$

Изучение влияния криволинейности границ зерен показало, что форма границ существенно влияет на распределение напряжений только при граничных условиях в виде стенок полных дислокаций. При отсутствии двойника в зерне поликристалла основными места концентрации напряжений являются границы и узловые точки зерна, а также участки за его пределами. Центр зерна в таком случае – зона низкого уровня напряжений.

При наличии единичного клиновидного двойника наблюдается увеличение компонент тензора напряжений внутри зерна. За пределами зерна влияние рассматриваемого двойника незначительно. Симметричность распределения напряжений внутри зерна нарушается, однако их знакопеременность не изменяется.

Таким образом, разработанная методика расчета полей напряжений в зерне поликристалла, содержащем единичный остаточный клиновидный двойник, позволяет учитывать влияние прилегающих зерен. Выполненный расчет напряжений в системе «зерно поликристалла с остаточным двойником – соседние зерна» показал, что их максимальные значения локализируются на границах зерен и двойников.

Автор благодарит Дробышевскую Т. В. за помощь в проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Lubenets, S. V.** Dynamics of twinning in metals and alloys / S. V. Lubenets, V. I. Startsev, L. S. Fomenko // *Physica Status Solidi (a)*. – 1985. – Vol. A92, is. 1. – P. 11–55.
- 2 **Полухин, П. И.** Физические основы пластической деформации / П. И. Полухин, С. С. Горелик, В. К. Воронцов. – М. : Металлургия, 1982. – 584 с.
- 3 **Дробышевская, Т. В.** Задача о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным некогерентным двойником в пяти-, шести- и семигранном зерне поликристалла с гексагональной структурой / Т. В. Дробышевская, О. М. Остриков // *Физическая мезомеханика*. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 79–88
- 4 **Хирт, Дж.** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
- 5 **Павлов, П. В.** Физика твердого тела / П. В. Павлов, А. Ф. Хохлов. – М. : Высш. шк., 2000. – 494 с.
- 6 **Остриков, О. М.** Методика прогнозирования распределения полей напряжений в реальных кристаллах с остаточными некогерентными двойниками : монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 278 с.
- 7 **Остриков, О. М.** Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // *Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого*. – 2006. – № 2. – С. 10–18.
- 8 **Дробышевская, Т. В.** Задача о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным двойником в поликристаллическом зерне различной формы / Т. В. Дробышевская, О. М. Остриков // *Наука и техника*. – 2016. – Т. 15, № 3. – С. 247–260.
- 9 **Fidder, H.** Twinning induced spatial stress gradients: Local versus global stress states in hexagonal close-packed materials / H. Fidder, I. Basu, J. Th. M. DeHosson // *Acta Materialia*. – 2023. – Vol. 256. – Article 119142. – 17 p.
- 10 **Остриков, О. М.** Дислокационная модель некогерентного нетонкого двойника / О. М. Остриков // *Журнал технической физики*. – 2012. – Т. 82, № 11. – С. 38 – 42.

O. M. OSTRIKOV

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

INFLUENCE OF ADJACENT MICROGRAINS ON THE STRESS-STRAIN STATE OF A POLYCRYSTAL GRAIN WITH A RESIDUAL WEDGE TWIN

A method for calculating stress fields in a group of polycrystal grains is developed for the case when one of grain contains a single residual wedge-shaped twin. The calculations took into account the influence of adjacent grains; it is estimated that the maximum stress values are localized at the grain and twin boundaries.

Keywords: stress-strain state, residual wedge-shaped twin, polycrystal grain.

Получено 15.09.2025

УДК 620.179.141:629.4.027.4:004.94

А. Г. ОТОКА, О. В. ХОЛОДИЛОВ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ОБНАРУЖЕНИЕ ТРЕЩИН В ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЕСАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИХ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Представлены результаты анализа картин распределения тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности цельнокатаных колес колесных пар, полученные путем моделирования с помощью программы ANSYS Maxwell 3D с учетом магнитной проницаемости сталей и формы кривизны дисков. Получены номограммы по выбору тока намагничивания при магнитопорошковом контроле в зависимости от относительной μ (в интервале от 50 до 300) и абсолютной μ_a (в интервале от 62,85 до 377,10 мкГн/м) магнитной проницаемости применяемых колесных сталей.

Ключевые слова: цельнокатаное колесо, магнитопорошковый контроль, расчетный ток намагничивания, напряженность магнитного поля, соленоид, магнитная индукция.

Введение. Несмотря на широкое практическое применение магнитопорошкового контроля (МПК), его теоретическая и численная база остается недостаточно разработанной. Обзор литературных источников показывает недостаток исследований, посвященных двум ключевым аспектам: расчету полей рассеяния для целей проведения МПК и разработке вычислительных методик для решения обратных задач дефектоскопии, включая оптимизацию технологий намагничивания.

Из ключевых публикаций в данной области можно выделить несколько. Так, в работе [1] методом конечных элементов (КЭ) исследована зависимость локальной плотности магнитного потока от геометрических параметров искусственной щели, что позволяет оценить порог обнаружения трещин в зависимости от их размеров.

Авторы публикации [2] представили трехмерную КЭ-модель для расчета распределения поля в ферромагнитной трубе с отверстием, намагничиваемой соленоидом конечной длины.

В статье [3] авторами определялась магнитная проницаемость магнито-реологических эластомеров посредством метода обратного моделирования с помощью программного обеспечения для конечно-элементного анализа. Метод заключался в измерении плотности магнитного потока и силы притяжения, возникающих между магнитами, когда образцы эластомеров помещались между магнитами.

Проведенный анализ научных публикаций и регламентирующей нормативно-технической документации (НТД) по МПК элементов ходовой части железнодорожного подвижного состава (в частности, железнодорожных колес колесных пар) позволяет сделать следующий вывод: методика определения силы тока для намагничивания, обеспечивающая высокую достоверность обнаружения дефектов с установленными предельными размерами, является полностью стандартизированной на уровне расчетных формул.

Данное положение находит прямое подтверждение в действующих стандартах. Например, если обратиться к государственному стандарту [4], то для достижения требуемого намагничивания с использованием соленоида, образованного витками гибкого кабеля, среднеквадратичное значение тока, протекающего по кабелю, определяется по формуле

$$I_{\text{расч1}} = 3H \cdot [10 + (Y^2/40)], \quad (1)$$

где H – тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на поверхности цельнокатаного колеса, кА/м; Y – расстояние между соседними витками в обмотке, мм.

При этом в государственном стандарте [5] намагничивающий ток при продольном намагничивании с помощью соленоида или обмотки гибким кабелем определяют по формуле

$$I_{\text{расч2}} = m (L/N) H; \quad (2)$$

$$I_{\text{расч3}} = H/K_c, \quad (3)$$

где m – коэффициент, определяемый в зависимости от соотношения радиуса и длины соленоида или обмотки; L – длина соленоида или максимальная длина обмотки, см; N – число витков соленоида ($N = 10$); H – требуемая напряженность магнитного поля, А/см; K_c – постоянная соленоида.

Однако, если подставить в формулы (1)–(3) показатели требуемого нам соленоида, мы получим значения, отличающиеся друг от друга.

Таким образом, проблема обеспечения необходимого уровня намагниченности сводится не к разработке новых расчетных методов, а к корректному определению и применению указанных выше параметров для конкретной контрольно-технологической конфигурации, что решается в рамках типовых инженерных расчетов и технологической отладки процесса.

Интересным является и то, что в стандарте [5] утверждается, что при включении соленоида с находящимся в нем объектом контроля напряженность магнитного поля будет несколько отличаться от расчетной, но это отличие для МПК будет не существенно.

Существующая нормативная методика расчета намагничивающего тока может давать заниженные значения, что на практике приводит к недостаточному уровню напряженности магнитного поля на поверхности объекта контроля в контролируемом сечении и, как следствие, к снижению достоверности

выявления дефектов (трещин). В связи с этим задача определения эффективного (достаточного) значения тока намагничивания для обеспечения гарантированной обнаруживающей способности МПК представляется актуальной.

Одной из ключевых причин данного расхождения является недостаточный учет магнитных свойств материала колеса. Известно, что абсолютная магнитная проницаемость μ ферромагнитной стали является функцией двух основных факторов:

- химического состава и режимов обработки (термической, химико-термической);
- режима намагничивания (величина μ нелинейно зависит от напряженности приложенного поля H (пропорциональной току)).

Их неучет приводит к ошибке в расчете требуемой напряженности магнитного поля и, соответственно, к занижению значения намагничивающего тока. Результатом является формирование магнитного потока недостаточной плотности для индикации дефектов, что повышает риск их пропуска при контроле.

Целью работы является оценка влияния магнитной проницаемости стали и формы профиля диска на тангенциальную составляющую магнитного поля на поверхности железнодорожных колес с помощью КЭ-анализа.

Методика исследований. Рассмотрим железнодорожное колесо как ферромагнитный материал в вакууме (рисунок 1) [6]. При этом вблизи точки A , находящейся на границе раздела сред, вектор магнитной индукции равен B_0 и направлен под углом α к поверхности, а относительная магнитная проницаемость колесной стали равна μ_r . Найдем значение магнитной индукции на поверхности объекта контроля вблизи точки A .

Известно, что значение индукции определяется по формуле

$$B = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2},$$

где B_n и B_τ – нормальная и тангенциальная составляющие магнитной индукции на поверхности колеса.

Если воспользоваться граничными условиями $B_{n1} = B_{n2}$, $H_{\tau1} = H_{\tau2}$ (индексы 1 и 2 относятся к вакууму и ферромагнетику соответственно), то

$$B_n = B_0 \sin \alpha; B_\tau = \mu_r \mu_0 H_\tau = \mu_r B_0 \sin \alpha_0;$$

$$B = B_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \mu_r \sin^2 \alpha}.$$

Из последнего соотношения следует, что чем больше относительная магнитная проницаемость μ_r колесной стали, тем больше магнитная индукция B в материале.

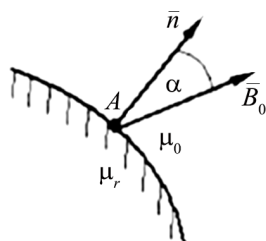


Рисунок 1 – Схема для расчета магнитной индукции на поверхности железнодорожного колеса

Из формулы

$$H = I \frac{w}{l},$$

где I – значение тока, соответствующее напряженности магнитного поля на поверхности колеса; w – число витков гибкого кабеля; l – длина катушки, следует, что повышение тока в намагничивающей обмотке приводит к увеличению напряженности магнитного поля.

Отметим, что государственные стандарты не учитывают не только магнитные характеристики применяемых колесных сталей, но и форму (кривизну) дисков. С вводом изменений в руководящий документ [7] цельнокатаные колеса с криволинейным диском производства ТОО «Проммашкомплект» (рисунк 2, *з*) вызывают особый интерес, ввиду значительного выхода профиля диска за ширину обода колеса по чертежу ПМК 1.2.17-КП (ПМК).

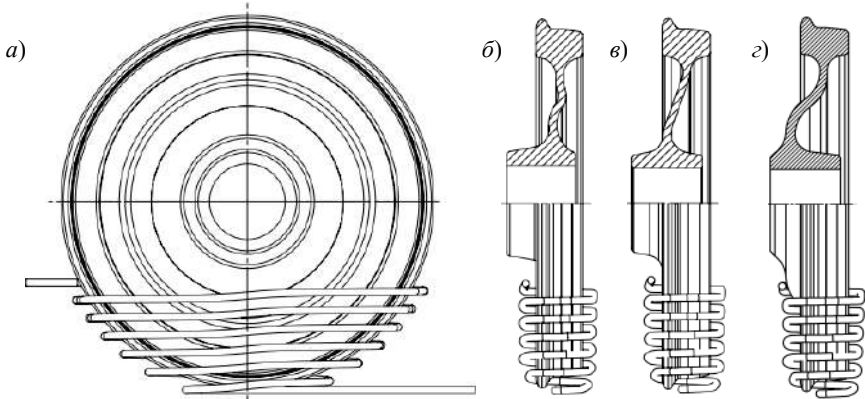


Рисунок 2 – Схема намагничивания железнодорожных колес (*а*) с помощью соленоида, образованного витками гибкого кабеля при криволинейной (*б*), плоскониической (*в*) и криволинейной по чертежу ПМК (*з*) формах дисков

В связи с тем, что увеличивается расстояние от последнего верхнего витка соленоида до поверхности диска, величина тока намагничивания будет значительно выше, чем для традиционного плоскониического и криволинейной с плечом, не выходящим за ширину обода.

Для количественной оценки необходимых параметров тока выбран метод КЭ-моделирования электромагнитных полей. В качестве базового программного комплекса использовался пакет ANSYS Electronics, модуль ANSYS Maxwell, предназначенный для решения 3-мерных квазистатических электромагнитных задач. В рамках предварительного исследования [10] нами была разработана и верифицирована конечно-элементная модель, описывающая процесс намагничивания железнодорожного колеса (с плоскостной конфигурацией диска) соленоидом, сформированным витками гибкого кабе-

ля. Были получены и проанализированы распределения напряженности магнитного поля в свободном пространстве (воздушной среде) вокруг изолированного соленоида.

Продолжением работ стало создание уточненных моделей, учитывающих геометрию реальных цельнокатаных железнодорожных колес. Их трехмерные модели для различных конфигураций диска (включая профиль, конусность и геометрию обода) были разработаны на основе конструкторской документации, регламентированной действующими руководящими документами и отраслевыми стандартами [7–9]. Моделирование механической части (колесо и положение соленоида) было выполнено в среде CAD-проектирования SolidWorks 2022 (рисунок 3). Это обеспечивает соответствие виртуальных моделей реальным эксплуатационным объектам.

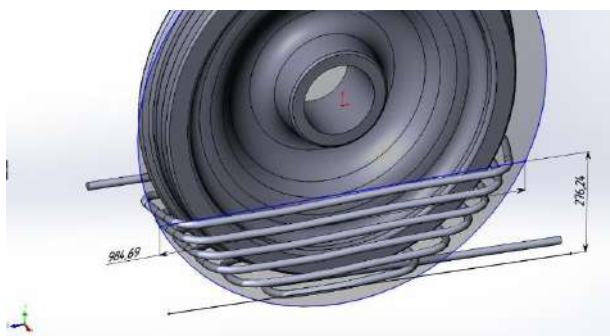


Рисунок 3 – Модель в Solidworks колеса по чертежу ПМК совместно с соленоидом

Итоговые сборки были импортированы в ANSYS Maxwell 3D для проведения полного электромагнитного анализа, целью которого является расчет распределения магнитной индукции в материале колеса при заданных значениях намагничивающего тока и оценка его достаточности для выявления дефектов.

В колесных центрах, бандажах и цельнокатаных колесах применяются низкоуглеродистые стали (менее 25 % мас. С, считаются мягкими), среднеуглеродистые 0,25–0,6 % С (средней твёрдости) и высокоуглеродистые – свыше 0,6 % С (твердые).

Распространенными сталями в зависимости от типа подвижного состава являются сталь 2, Т, М, Л и др.

В качестве базового материала для моделирования магнитных свойств была принята низкоуглеродистая сталь марки 1010 (аналог сталей 10 и 08 по отечественным стандартам). Данный выбор обусловлен тем, что ее химический состав, в частности содержание углерода, соответствует марке М колесного центра, указанной в государственном стандарте [11]. Это позволяет рассматривать данную сталь в качестве репрезентативного материала для анализа базового сценария намагничивания.

Результаты КЭ-моделирования, приведенные в таблице 1, свидетельствуют о принципиальном различии в характере намагничивания колес с плоскостным и криволинейным профилем диска. Количественный анализ напряженности магнитного поля подтверждает, что для обеих конфигураций внутренняя сторона диска намагничивается более интенсивно. Ключевым отличием является превышение значения тангенциальной составляющей напряженности поля H_t на внешней стороне криволинейного диска по сравнению с плоскостным аналогом.

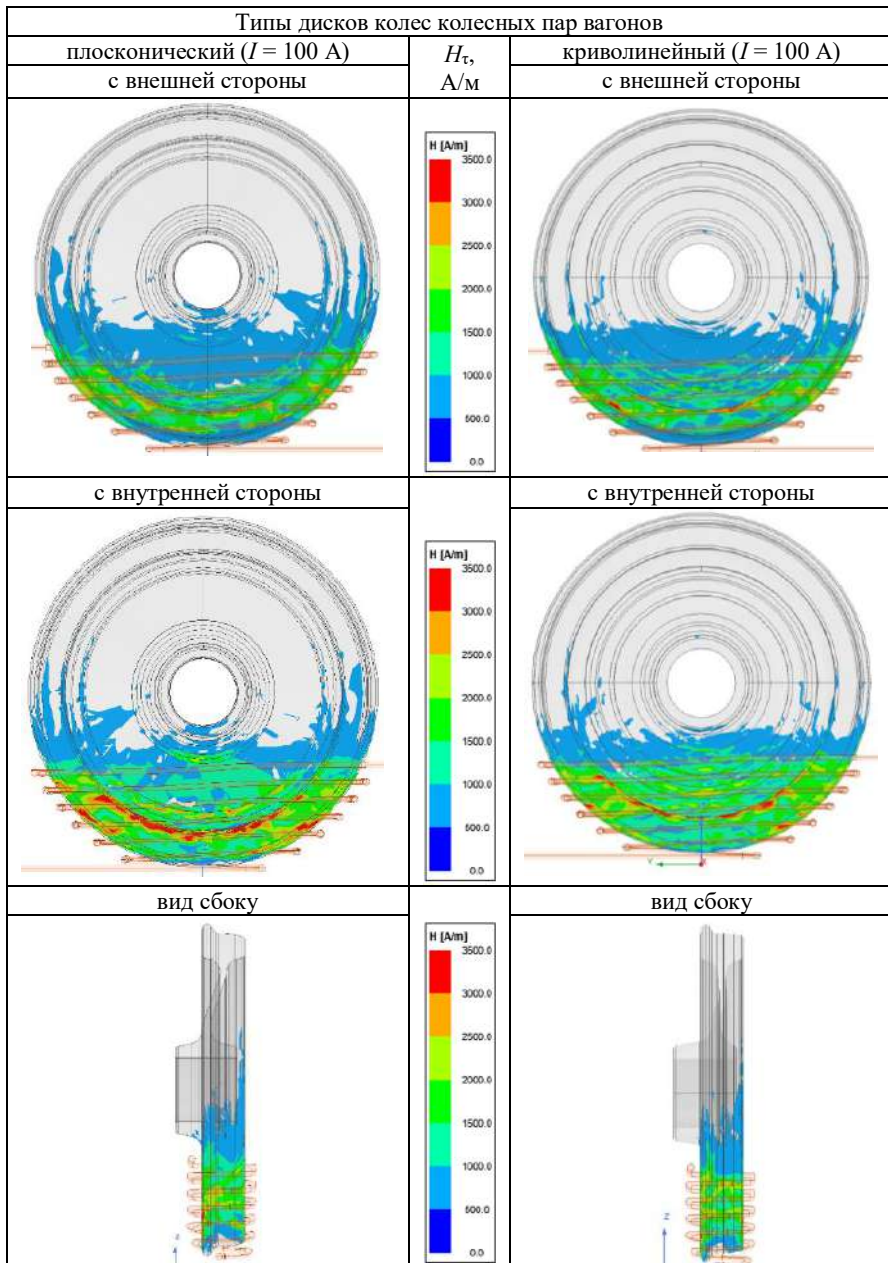
Экспериментально установлено, что для обеспечения минимально требуемого уровня чувствительности контроля – заданного порогового значения H_t на поверхности диска в рабочей зоне (участок до перехода в ступицу) – для обоих типов геометрии достаточно значения намагничивающего тока $I = 500$ А. Стабильность данного параметра в указанной зоне объясняется тем, что ее профиль не выходит за проекцию ширины обода. На основании этого указанный ток и соответствующее ему стационарное распределение H_t были определены в качестве реперного режима для последующего параметрического анализа с учетом реальных магнитных свойств материала.

Для типичных ферритных сталей, используемых в колесных парах, относительная магнитная проницаемость μ находится в диапазоне 50–300. На втором этапе исследований было проведено многовариантное моделирование с вариацией ключевых параметров материала в КЭ-модели (изменялась магнитная проницаемость μ от 50 до 300 с интервалом 25 и электропроводность σ (от 10,3 до 13,7 МСм/м)).

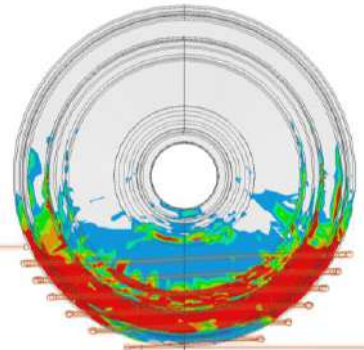
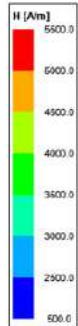
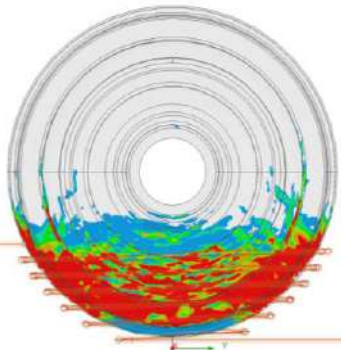
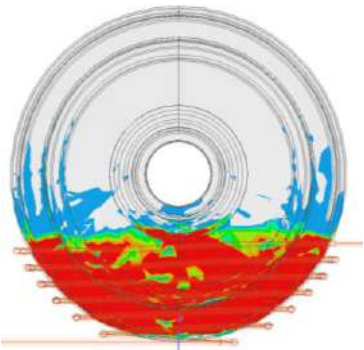
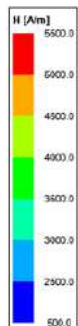
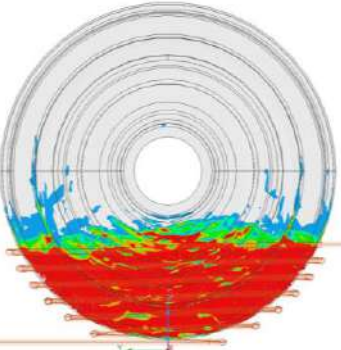
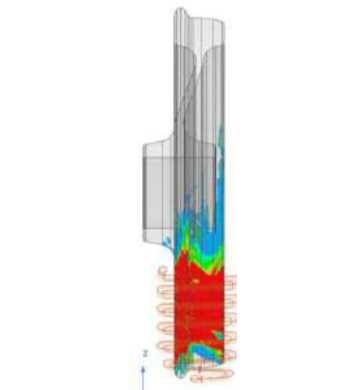
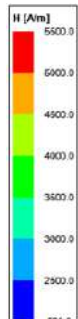
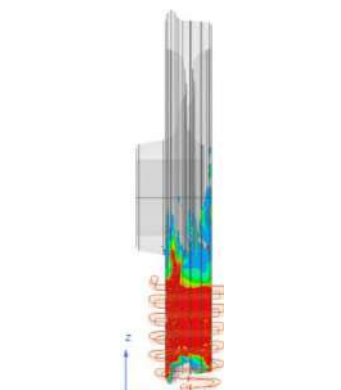
Моделирование для всех исследуемых конфигураций выявило систематическое наличие локализованных областей, в которых значение H_t существенно отклоняется от среднестатистического фона в предположительно однородных зонах. Этот факт однозначно указывает на неоднородный характер намагничивания при использовании соленоида, что полностью соответствует данным инструментального контроля на практике. Физической причиной данной неоднородности является пространственная вариация воздушного зазора между соленоидом и поверхностью диска, обусловленная его сложным немонотонным профилем.

На картинах распределения, где цветовая шкала поставлена в соответствие с дискретными диапазонами значений H_t , области, соответствующие граничным условиям шкалы, являются наиболее информативными. Минимальная локальная аномалия H_t в такой «приграничной» зоне приводит к ее переходу в соседний интервал квантования. Визуально это регистрируется, как возникновение контрастной субзоны с иным цветовым кодом. Следовательно, наблюдаемая дискретная цветовая мозаика на колесе является не артефактом визуализации, а прямым количественным отображением градиентов и микровариаций тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля в приповерхностном слое объекта контроля.

Таблица 1 – Распределение H_t на поверхности колеса



Окончание таблицы 1

Типы дисков колес колесных пар вагонов		
плосконижеский ($I = 500 \text{ A}$)	H_r , А/м	криволинейный ($I = 500 \text{ A}$)
с внешней стороны		с внешней стороны
		
с внутренней стороны		с внутренней стороны
		
вид сбоку		вид сбоку
		

Результаты параметрического моделирования демонстрируют значительное влияние относительной магнитной проницаемости μ материала колеса на распределение тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля H_t в его приповерхностном слое. Установлена обратная зависимость между величиной μ и эффективностью намагничивания: с ростом магнитной проницаемости наблюдается выраженное снижение уровня индуцированной напряженности поля H_t при неизменной силе тока (таблица 2).

Для иллюстрации данного эффекта рассмотрим результаты для колеса с плоскостным диском при намагничивающем токе $I = 500$ А. При значении $\mu = 100$, тангенциальная составляющая H_t на внешней поверхности в характерных зонах (обод, приободная зона, гребень, за исключением участка гребня, находящегося вне проекции соленоида) достигает значения до 55 А/см. При увеличении проницаемости до $\mu = 200$, величина H_t в тех же зонах снижается примерно в 1,8 раза, не превышая 30 А/см.

Дальнейшее увеличение μ (в исследуемом диапазоне) приводит к качественному изменению картины намагничивания. Его пороговый уровень при сохранении тока $I = 500$ А перестает достигаться в приободной зоне и основной части диска. Намагничивание происходит лишь в области обода, причем локально, в участках с минимальным расстоянием до витков соленоида, где градиент поля максимален.

В отличие от магнитной проницаемости вариация значений удельной электрической проводимости σ в характерном для сталей в диапазоне от 10,3 до 13,7 МСм/м не оказывает статистически значимого влияния на установившиеся значения H_t в рамках примененной квазистатической модели.

Представлял интерес также сравнительный анализ картины распределения магнитного поля, получаемой при изменении силы тока, относительной магнитной проницаемости, электропроводности по сравнению с картиной распределения магнитного поля при силе тока 500 А.

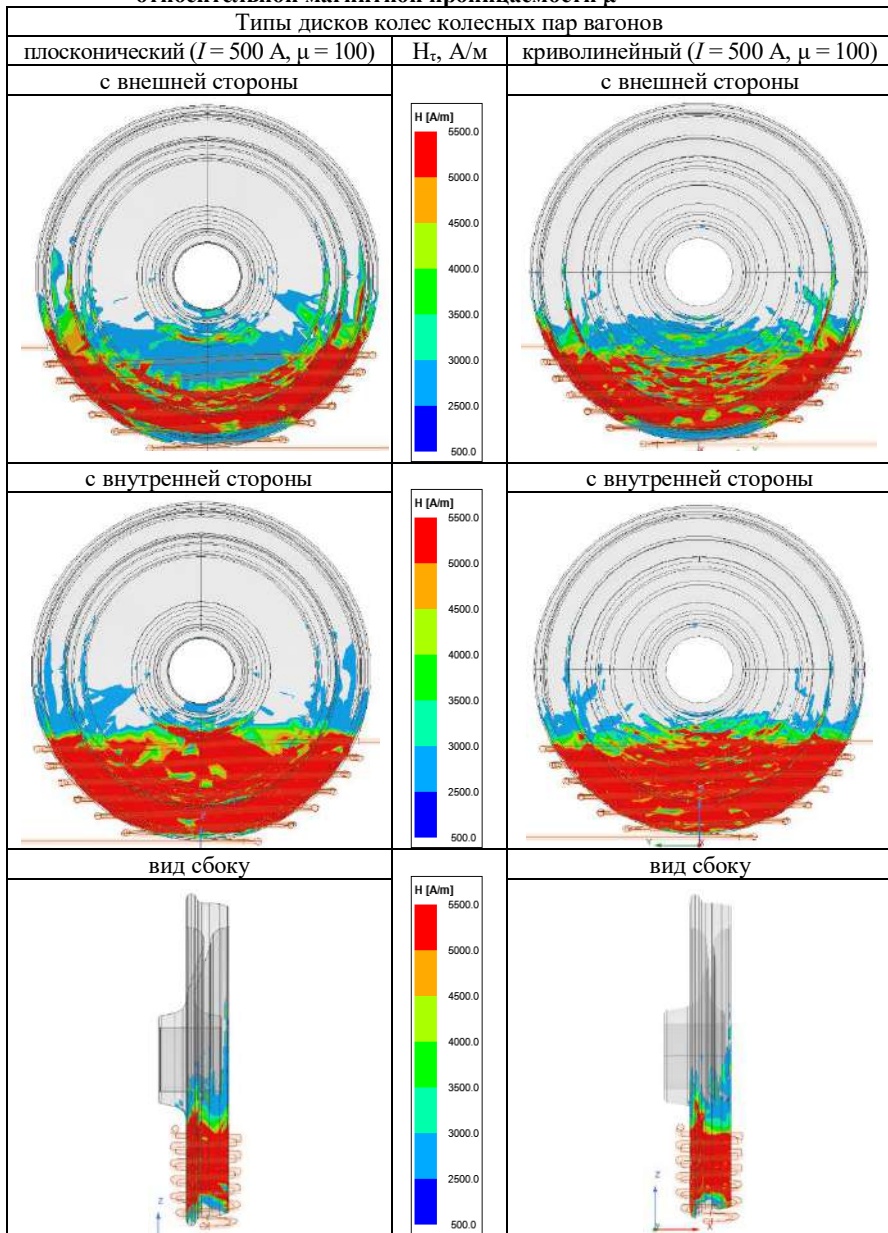
Задавая значение относительной магнитной проницаемости колесной стали и сопоставляя картину распределения тангенциальной составляющей магнитного поля с исходной для стали 1010 при 500 А, на выходе получали требуемый расчетный ток для намагничивания железнодорожного колеса (таблица 3).

На следующем этапе исследований был изучен процесс намагничивания колес, соответствующих чертежу ПМК.

Априорно предполагалось снижение эффективности намагничивания из-за увеличения воздушного зазора между активной частью соленоида и поверхностью диска в зоне перехода.

Картины распределения H_t для разных колес при токе $I = 500$ А приведены в таблице 4.

Таблица 2 – Распределение H_t на поверхности колеса при различной относительной магнитной проницаемости μ



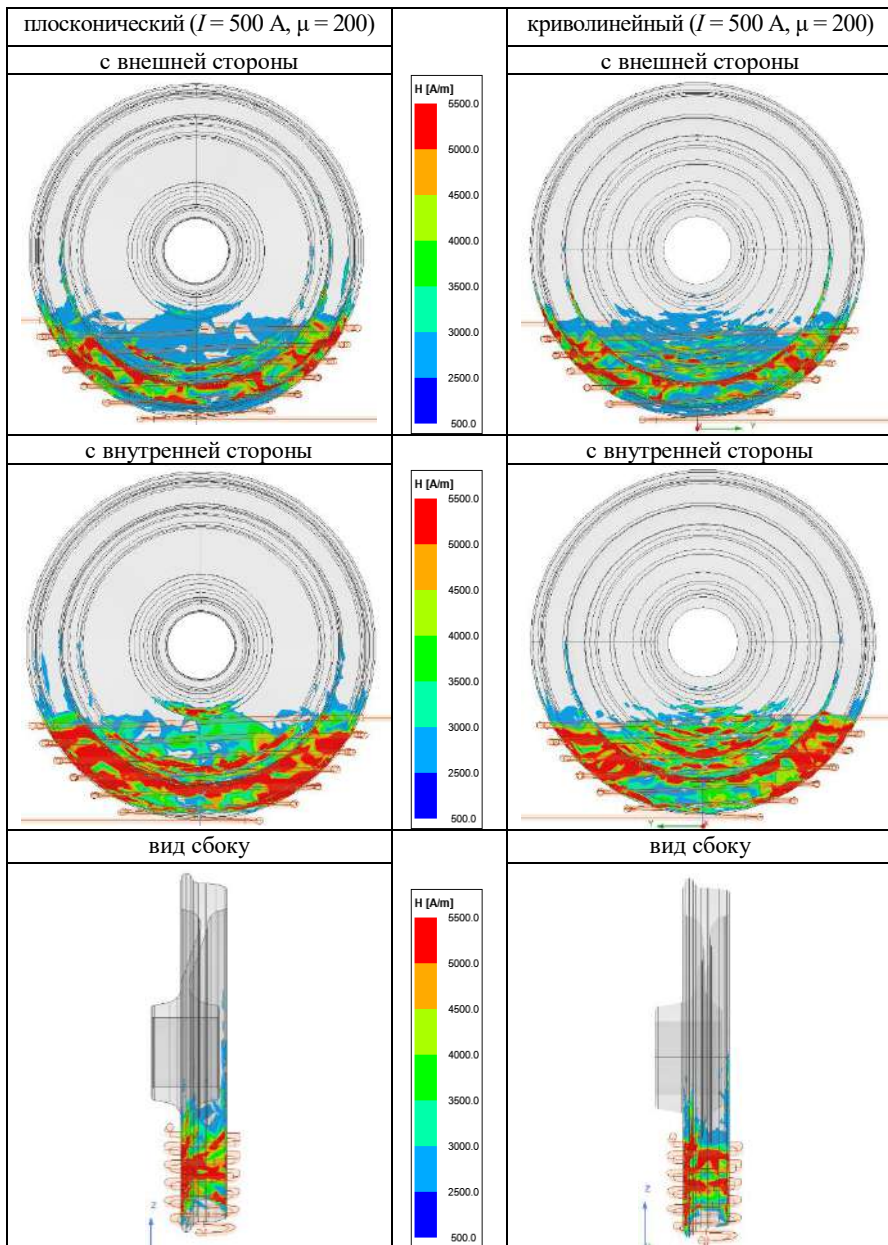
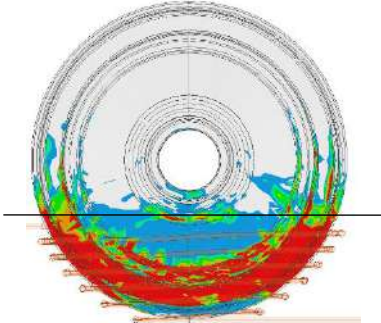
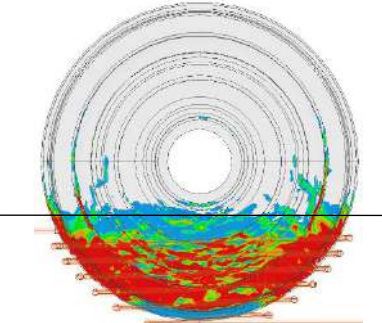
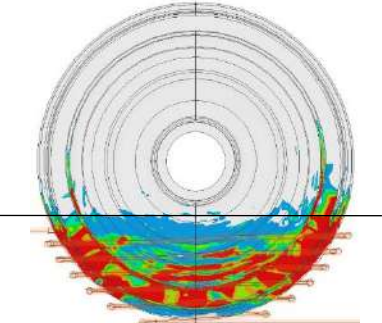
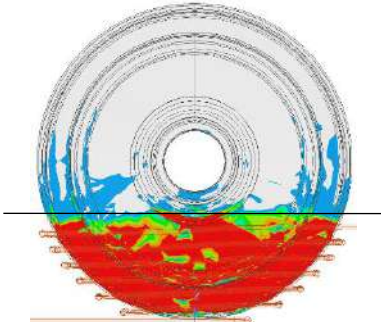
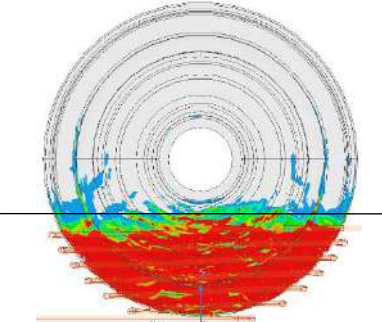
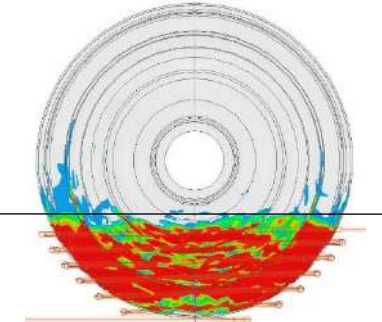


Таблица 3 – Результаты получения картины распределения H_z , аналогичной картине при $I = 500$ А, $\mu = 100$

Типы дисков колес колесных пар вагонов		
плосконический ($I = 303$ А, $\mu = 50$)		
с внешней стороны	сбоку	с внутренней стороны
плосконический ($I = 500$ А, $\mu = 100$)		
с внешней стороны	сбоку	с внутренней стороны
плосконический ($I = 874$ А, $\mu = 200$)		
с внешней стороны	сбоку	с внутренней стороны

Таблица 4 – Сравнение картины распределения H_r в различных по исполнению колесах

плоскони́ческий с внешней стороны ($I = 500 \text{ A}$, $\mu = 100$)	криволинейный с внешней стороны ($I = 500 \text{ A}$, $\mu = 100$)	криволинейный по чертежу ПМК с внешней стороны ($I = 500 \text{ A}$, $\mu = 100$)
		
плоскони́ческий с внутренней стороны ($I = 500 \text{ A}$, $\mu = 100$)	криволинейный с внутренней стороны ($I = 500 \text{ A}$, $\mu = 100$)	криволинейный по чертежу ПМК с внутренней стороны ($I = 500 \text{ A}$, $\mu = 100$)
		

Сравнительный анализ результатов намагничивания нового диска колеса с традиционными плоскочисечным и криволинейным (профиль которых не выходит за ширину обода) показывает, что диск намагничивается недостаточно (имеется неокрашенная зона ниже ограничительной линии, и, следовательно, места с тангенциальной составляющей $H_t < 25$ А/см). Что и подтвердило предположение о снижении чувствительности к выявлению трещин.

Следовательно, намагничивание током 500 А не обеспечивает условий требуемой чувствительности в зоне диска нового колеса (до зоны перехода диска в ступицу колеса). Поэтому задачей было получить такое значение тока, при котором это условие будет выполнено.

В нашем случае сила тока намагничивания для нового диска, при которой $H_t \geq 25$ А/см, составила $I = 800$ А.

В дальнейшем сравнивались полученные картины распределения тангенциальной составляющей H_t на поверхности колеса с разной относительной магнитной проницаемостью с картиной, полученной при $\mu = 100$ и токе $I = 800$ А.

В результате анализа полученных данных установлена функциональная зависимость между относительной магнитной проницаемостью материала колеса и силой тока, необходимой для достижения минимально достаточной напряженности магнитного поля ($H_t \geq 25$ А/см) в ключевых контрольных зонах: внутренней и внешней сторонах обода, поверхности катания, приободной зоне и диске (исключая зону перехода в ступицу). Эта зависимость позволяет построить рабочие номограммы (рисунок 4) для оперативного определения тока намагничивания при использовании соленоида в зависимости от магнитных свойств контролируемой стали.

Учитывая магнитную проницаемость воздуха, можно получить номограмму для тока намагничивания I от абсолютной магнитной проницаемости стали μ_a железнодорожного колеса (рисунок 5).

Заключение. На основе результатов параметрического КЭ-моделирования построены номограммы для определения силы намагничивающего тока I в зависимости от относительной μ и абсолютной μ_a магнитной проницаемости материала колеса – характеристик, влияние которых на необходимую величину тока не регламентировано в действующих государственных стандартах.

Последующий сравнительный анализ распределений напряженности магнитного поля для колес с различной геометрией диска подтвердил, что расчетное значение тока намагничивания зависит непосредственно и от формы диска. Таким образом, для корректного определения параметров намагничивания в практике МПК требуется одновременный учет как магнитных характеристик объекта, так и его пространственной конфигурации.

Работа выполнена в рамках задания 3.13 Государственной программы научных исследований «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».

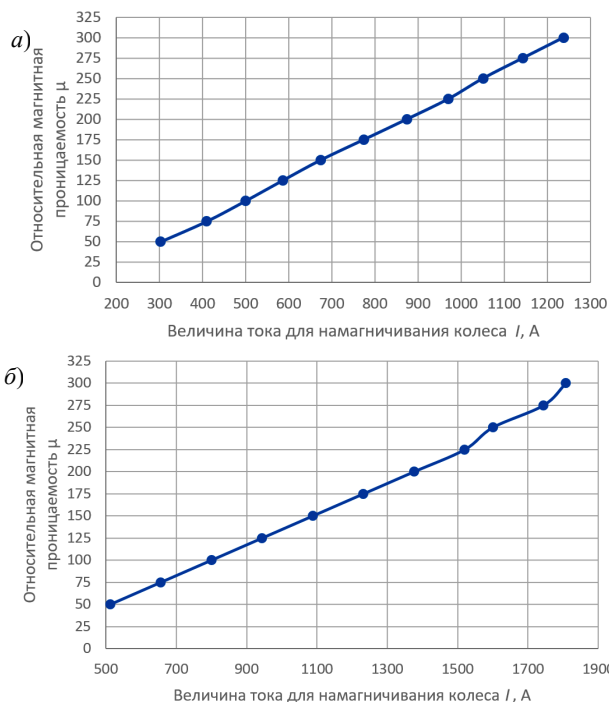


Рисунок 4 – Номограммы для выбора тока намагничивания I в зависимости от μ при проведении МПК ж.-д. колеса с плосконическим и криволинейным дисками (а) и криволинейным по чертежу ПМК (б)

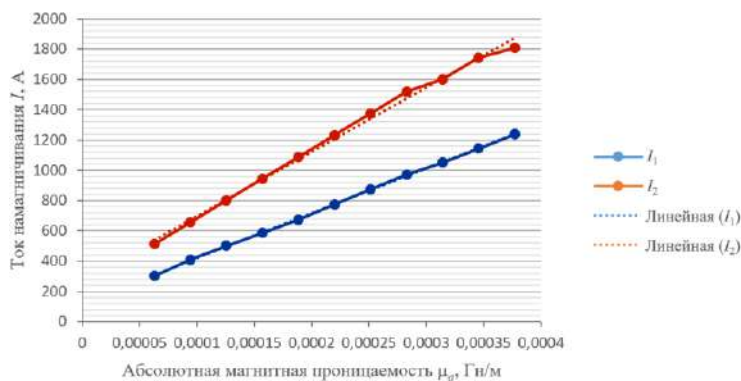


Рисунок 5 – Номограмма выбора тока намагничивания I в зависимости от абсолютной магнитной проницаемости стали μ_a :

I_1 – для колес с плосконическим и криволинейным диском;

I_2 – для колес с криволинейным диском в соответствии с чертежом ПМК

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 3D finite element simulation of magnetic particle inspection / B. S. Wong, Y. G. Low, X. Wang [et al.] // Proceedings of the 2010 IEEE Conference on Sustainable Utilization and Development in Engineering and Technology. – Petaling Jaya, 2010. – P. 50–55.
- 2 **Goldshtein, A. E.** Modeling of magnetic fields and signals of a ferromagnetic pipe flaw detector induced by a through hole defect / A. E. Goldshtein, V. Yu. Belyankov // Bulletin of the Karaganda university. Physics series. – 2020. – Vol. 100, is. 4 (100). – P. 49–56.
- 3 **Schubert, G.** Magnetic induction measurements and identification of the permeability of Magneto-Rheological Elastomers using finite element simulations / G. Schubert, P. Harrison // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2016. – Vol. 404. – P. 205–214.
- 4 ГОСТ Р ИСО 9934–2011. Контроль неразрушающий. Магнитопорошковый метод. Часть 1. Основные требования. – Введ. 13.12.2011. – М. : Стандартинформ, 2013. – 20 с.
- 5 ГОСТ Р 56512–2015. Контроль неразрушающий. Магнитопорошковый метод. Типовые технологические процессы. – Введ. 01.06.2016. – М. : Стандартинформ, 2016. – 56 с.
- 6 **Новиков, В. А.** Магнитный контроль в вопросах и ответах : учеб. пособие / В. А. Новиков. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – 347 с.
- 7 РД ВНИИЖТ 27.05.01–2017. Руководящий документ по ремонту и техническому обслуживанию колесных пар с буксовыми узлами грузовых вагонов магистральных железных дорог колеи 1520 (1524) мм (утв. Советом по ж.-д. трансп. государств – участников Содружества; протокол от «19–20» октября 2017 г. № 67), 2017. – 242 с.
- 8 Руководящий документ по ремонту и техническому обслуживанию колесных пар с буксовыми узлами пассажирских вагонов магистральных железных дорог колеи 1520 (1524) мм (утв. Советом по ж.-д. трансп. государств – участников Содружества, протокол от «4–5» ноября 2015 г. № 63), 2015. – 281 с.
- 9 ГОСТ 10791–2011. Колеса цельнокатаные. Технические условия. – Введ. 15.03.2011. – М. : Стандартинформ, 2011. – 28 с.
- 10 **Отока, А. Г.** Определение размера зоны эффективной намагниченности при магнитопорошковом контроле цельнокатаного колеса с помощью моделирования / А. Г. Отока, М. В. Быков, О. В. Холодилов // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. Году качества. Ч. 1, Гомель, 21–22 ноября 2024 г. – Гомель : БелГУТ, 2024. – С. 117–119.
- 11 ГОСТ Р 55498–2013. Центры колесные катаные для железнодорожного подвижного состава. Технические условия. – Введ. 29.07.2013. – М. : Стандартинформ, 2014. – 16 с.

A. G. OTOKA, O. V. KHOLODILOV
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

RAILWAY WHEELS CRACK DETECTION ON THE BASE OF FINITE ELEMENT MODELING OF THEIR MAGNETIZATION

The paper presents the analysis results for the distribution patterns of the magnetic field strength tangential component on the surface of solid-rolled wheelsets. The results are obtained by modeling using ANSYS Maxwell 3D, taking into account the magnetic permeability of the steels and the wheels curvature. There are obtained the nomograms for selecting the magnetization current for magnetic particle testing depending on the relative μ (in the range from 50 to 300) and absolute μ_a (in the range from $6,285 \cdot 10^{-5}$ to $3,771 \cdot 10^{-4}$ H/m) magnetic permeability of the wheel steels used.

Keywords: solid-rolled wheel, magnetic particle inspection, estimated magnetization current, tangential component of magnetic field strength, solenoid, magnetic induction.

Получено 25.10.2025

УДК 539.31:62-419

В. С. САЛИЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ДЕФОРМИРОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ КРУГЛОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Представлена постановка краевой задачи об изгибе несимметричной по толщине упругой круглой пятислойной пластины с двумя заполнителями. Деформирование несущих слоев удовлетворяет гипотезам Кирхгофа, сравнительно толстых заполнителей – гипотезе Тимошенко. Вариационным методом Лагранжа получены уравнения равновесия с учетом работы касательных напряжений в заполнителях. Из системы выделено дифференциальное неоднородное уравнение четвертого порядка относительно сдвига в одном из заполнителей. Решение соответствующего однородного уравнения сведено к решению двух модифицированных уравнений Бесселя второго порядка. Общее решение неоднородного уравнения выписано в конечном виде. Приведен пример численного расчета.

Ключевые слова: круглая пятислойная пластина, асимметрия по толщине, аналитическое решение, численные результаты.

Введение. Слоистые стержни, пластины и оболочки находят широкое практическое применение в различных отраслях техники, поэтому создание механико-математических моделей их деформирования представляет собой актуальную задачу.

В книгах [1–3] проведен анализ применимости различных кинематических гипотез при постановке и решению прикладных задач механики неоднородных конструкций и представлены исследования напряженно-деформированного состояния упругих трехслойных стержней и пластин при различных видах нагружения.

В статьях [4, 5] выполнен анализ колебаний трехслойных стержней и пластин под действием нагрузок разной природы. В работе [6] изучаются свободные колебания пятислойной круговой пластины на основе предположения о том, что кинематика конструкций подчиняется гипотезе ломаной линии.

Квазистатическому деформированию упругой трехслойной цилиндрической оболочки посвящена статья [7]. Учтено воздействие температурного поля и сжимаемость заполнителя. Изгиб круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием исследован в [8, 9]. Воздействие косинусоидальной нагрузки на трехслойную круговую пластину в своей плоскости анализируется в работе [10]. Учет физической нелинейности несущих слоев, в том числе при использовании материалов с памятью, а также вязкоупругости заполнителя осуществлен в [11]. Вариационная постановка краевой задачи обратимой термомеханики для многослойных конструкций представлена в статье [12].

Деформированию пятислойных упругих круговых *симметричных* по толщине пластин посвящены публикации [13–16]. В данной работе представлена постановка и получено аналитическое решение задачи о деформировании под действием статической нагрузки *несимметричной* по толщине пятислойной пластины.

1 Постановка краевой задачи. Рассматривается деформирование несимметричной по толщине пятислойной круговой пластины (рисунок 1). Полагается, что для достаточно тонких жестких несущих слоев 1, 2 и 4 выполняются гипотезы Кирхгофа, в соответствии с которыми нормаль несжимаема, она сохраняет прямолинейную форму и остается перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоя. Относительно толстые заполнители несжимаемы по толщине и воспринимают нагрузку в тангенциальном направлении. Нормали в них сохраняют прямолинейность, но поворачиваются на дополнительный угол $\psi_i(r)$ ($i = 1, 2$).

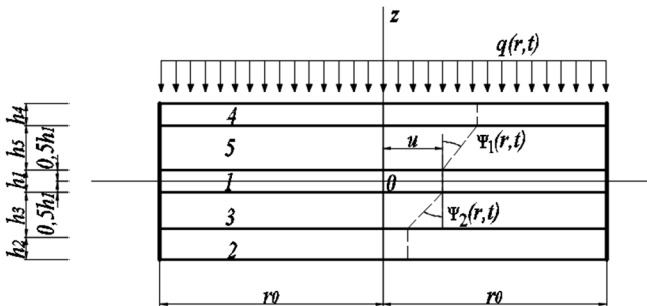


Рисунок 1 – Нумерация слоев и нагрузка в пятислойной пластине

Свяжем цилиндрическую систему координат со срединной плоскостью центрального несущего слоя. Из гипотезы прямолинейности нормалей заполнителей следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(5)} &= u_r^{(5)} + w_{,r} + \psi_1 \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} &= u_r^{(3)} + w_{,r} + \psi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ – относительные сдвиги в верхнем (5) и нижнем (3) заполнителях; запятая в индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; числовые индексы соответствуют номерам слоев.

Интегрирование соотношений (1) дает формулы для вычисления радиальных перемещений $u_r^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5 \psi_1, & \frac{h_1}{2} + h_3 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \psi_1, & \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, & -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\
u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Psi_2, & -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \\
u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\Psi_2, & -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3,
\end{aligned} \tag{2}$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $h_5\Psi_1, -h_3\Psi_2$ – смещения верхнего и нижнего несущих слоев за счет относительного сдвига в предстоящих заполнителях; $u(r)$ – радиальное перемещение срединной плоскости центрального слоя.

В качестве искоемых функций выступают прогиб $w(r)$, радиальное перемещение $u(r)$, относительные сдвиги $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$. Выражения деформаций следуют из (2) и соотношений Коши [1]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{(4)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + h_5\Psi_{1,r}; & \varepsilon_\varphi^{(4)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} + h_5\Psi_1); & \varepsilon_{rz}^{(4)} &= 0; \\
\varepsilon_r^{(5)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\Psi_{1,r}; & \varepsilon_\varphi^{(5)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\Psi_1\right); & \varepsilon_{rz}^{(5)} &= \frac{\Psi_1}{2}; \\
\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r}); \\
\varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Psi_{2,r}; & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Psi_2\right); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{\Psi_2}{2}; \\
\varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - zw_{,rr} - h_3\Psi_{2,r}; & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} - h_3\Psi_2); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Напряжения определяются с использованием формул (3) из закона Гука. При выводе с помощью вариационного принципа Лагранжа системы уравнений равновесия учтена работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}, \sigma_{rz}^{(5)}$ в заполнителях. В операторном виде получена система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1u + a_2\Psi_1 - a_3\Psi_2 - a_4w_{,r}) &= 0; \\
L_2(a_2u + a_5\Psi_1 - a_6w_{,r}) - h_5G_5\Psi_1 &= 0; \\
L_2(-a_3u + a_7\Psi_2 - a_8w_{,r}) - h_3G_3\Psi_2 &= 0; \\
L_3(a_4u + a_6\Psi_1 + a_8\Psi_2 - a_9w_{,r}) &= -q,
\end{aligned} \tag{4}$$

коэффициенты в которой:

$$a_1 = K_4^+h_4 + K_5^+h_5 + K_1^+h_1 + K_3^+h_3 + K_2^+h_2; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k; \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k;$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= K_5^+ \frac{h_5^2}{2} + K_4^+ h_4 h_5; \quad a_3 = K_3^+ \frac{h_3^2}{2} + K_2^+ h_2 h_3; \\
a_4 &= K_4^+ \frac{h_4}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ \frac{h_5}{2} (h_1 + h_5) - K_3^+ \frac{h_3}{2} (h_1 + h_3) - K_2^+ \frac{h_2}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2); \\
a_5 &= K_4^+ h_4 h_5^2 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3}; \quad a_6 = K_4^+ \frac{h_4 h_5}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right); \\
a_7 &= K_2^+ h_2 h_3^2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3}; \quad a_8 = K_2^+ \frac{h_2 h_3}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right); \\
a_9 &= K_4^+ h_4 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_4}{2} + h_1 h_5 + \frac{h_4^2}{3} + h_4 h_5 + h_5^2 \right) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + \\
&+ K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right);
\end{aligned}$$

дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\
L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};
\end{aligned}$$

G_k, K_k – модули упругости материалов, k – здесь и далее номер слоя.

При жесткой заделке контура должны выполняться граничные условия:

$$u(r_0) = \Psi_1(r_0) = \Psi_2(r_0) = w(r_0) = w_{,r}(r_0) = 0. \quad (5)$$

Граничные условия (5) с уравнениями равновесия (4) замыкают краевую задачу об изгибе пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины.

2 Решение краевой задачи. Применив оператор

$$L_1^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int rg \, dr; \quad L_1^{-1} L_3 = L_2$$

к четвертому уравнению системы (4), сведем ее к виду

$$\begin{aligned}
L_2(u) &= -L_2 \left(\frac{a_4}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \Psi_1 + \frac{a_3}{a_1} \Psi_2 \right); \\
b_1 L_2(\Psi_1) + b_2 L_2(\Psi_2) - h_5 G_3 \Psi_1 &= -\gamma_1 L_1^{-1}(q); \\
b_2 L_2(\Psi_1) + b_3 L_2(\Psi_2) - h_3 G_3 \Psi_2 &= -\gamma_2 L_1^{-1}(q); \\
L_2(w_{,r}) &= -\gamma L_1^{-1}(q) - \gamma_1 L_2(\Psi_1) - \gamma_2 L_2(\Psi_2).
\end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены коэффициенты

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{a_1}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_1 = \frac{a_1 a_6 - a_2 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_2 = \frac{a_1 a_8 + a_3 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}; \\ b_1 &= \frac{a_5 a_4^2 - a_1 a_3 a_9 + a_2^2 a_9 - 2a_2 a_4 a_6 + a_1 a_6^2}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_6 - a_2 a_4 a_8 - a_2 a_3 a_9}{a_4^2 - a_1 a_9}; \\ b_3 &= \frac{a_4^2 a_7 - a_1 a_7 a_9 + 2a_3 a_4 a_8 + a_3^2 a_9 + a_1 a_8^2}{a_4^2 - a_1 a_9}.\end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений системы (6) для случая $q = \text{const}$ получаем отдельное дифференциальное уравнение для сдвига ψ :

$$L_2^2(\psi_1) - 2A_1^2 L_2(\psi_1) + A_2^4 \psi_1 = f, \quad (7)$$

где
$$A_1^2 = \frac{h_5 G_5 b_3 + b_1 h_3 G_3}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}; \quad A_2^4 = \frac{h_5 G_5 h_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad f = \frac{\gamma_1 h_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2} L_1^{-1}(q).$$

Искомое общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\psi_1 = C_2 I_1(\beta_1 r) + C_3 K_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r) + C_5 K_1(\beta_2 r) + \psi_{1r}, \quad (8)$$

где ψ_{1r} – частное решение уравнения (7); C_2, \dots, C_5 – константы интегрирования;

$$\beta_1 = \lambda_1 A_2; \quad \beta_2 = \lambda_2 A_2; \quad \lambda_1^2 = \left| -A_0^2 + \sqrt{(A_0^2)^2 - 1} \right|; \quad \lambda_2^2 = \left| -A_0^2 - \sqrt{(A_0^2)^2 - 1} \right|; \quad A_0^2 = \frac{A_1^2}{A_2^2}.$$

Поскольку перемещения в центре пластины ограничены, а функции $K_1(r)$ при $r = 0$ не ограничены, то в (8) необходимо положить $C_3 = C_5 = 0$.

После интегрирования оставшихся уравнений системы (6) получаем искомое общее решение задачи в перемещениях, которое описывает деформирование сплошной круговой *несимметричной* по толщине упругой пятислойной пластины при изгибе равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\gamma_1 q r}{2h_5 G_5} + C_2 I_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r); \quad \psi_2 = \frac{\gamma_2 q r}{2h_3 G_3} + C_2 k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4 k_2 I_1(\beta_2 r); \\ w &= -\frac{q r^2}{4} \left(\frac{\gamma_1^2}{h_5 G_5} + \frac{\gamma_2^2}{h_3 G_3} + \frac{\gamma r^2}{16} \right) - \frac{C_2 I_0(\beta_1 r)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) - \\ &\quad - \frac{C_4 I_0(\beta_2 r)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) - \frac{C_5 \gamma r^2}{4} + C_8; \\ u &= \frac{1}{a_1} \left[\left(a_4 \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + a_2 - \frac{h_5 G_5 a_3 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) \frac{\gamma_1 q r}{2h_5 G_5} + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} (a_4 \gamma_2 - a_3) \frac{q r^2}{4} + \right. \\ &\quad \left. + a_4 \gamma \left(\frac{q r^4}{64} + \frac{C_5 r^2}{4} \right) + C_2 I_1(\beta_1 r) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + a_2 - a_3 k_1) + \right.\end{aligned}$$

$$+C_4 I_1(\beta_2 r) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + a_2 - a_3 k_2) \Big] + C_9 r, \quad (9)$$

где C_2, C_4, C_5, C_8, C_9 – константы интегрирования;
коэффициенты

$$k_1 = \frac{(\beta_1^2 (b_2^2 - b_1 b_3) + h_3 G_5 b_3)}{h_3 G_3 b_2}, \quad k_2 = \frac{(\beta_2^2 (b_2^2 - b_1 b_3) + h_5 G_3 b_3)}{h_5 G_3 b_2}.$$

При жесткой заделке контура пластины константы интегрирования получаем, обеспечивая решением (9) выполнение граничных условий (4):

$$C_2 = \frac{q}{2I_1(\beta_1)(k_2 - k_1)} \left(\frac{\gamma_2}{h_3 G_3} - \frac{\gamma_1 k_2}{h_5 G_5} \right); \quad C_4 = -\frac{q}{2I_1(\beta_2)(k_2 - k_1)} \left(\frac{\gamma_2}{h_3 G_3} - \frac{\gamma_1 k_1}{h_5 G_5} \right);$$

$$C_5 = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma_1 q}{h_5 G_5} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_3 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + \frac{\gamma_2 q (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} + \frac{\gamma q}{6} + \right. \\ \left. + 2C_2 I_1(\beta_1) (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + 2C_4 I_1(\beta_2) (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) \right);$$

$$C_8 = \frac{q}{4} \left(\frac{\gamma_1^2}{h_5 G_5} + \frac{\gamma_2^2}{h_3 G_3} + \frac{\gamma}{16} \right) + \frac{C_2 I_0(\beta_1)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + \frac{C_4 I_0(\beta_2)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + \frac{C_5 \gamma}{4};$$

$$C_9 = -\frac{1}{a_1} \left[\left(a_4 \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_3 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + a_2 - \frac{h_5 G_5 a_3 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) \frac{\gamma_1 q}{2h_5 G_5} + a_4 \gamma \left(\frac{q}{12} + \frac{C_5}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} (a_4 \gamma_2 - a_3) \frac{q}{2} + C_2 I_1(\beta_1) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + a_2 - a_3 k_1) + \right. \\ \left. + C_4 I_1(\beta_2) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + a_2 - a_3 k_2) \right]. \quad (10)$$

3 Численные результаты получены для пятислойной круговой пластины единичного радиуса при равномерно распределенной нагрузке $q_0 = -1$ МПа. При расчетах использовался базовый пакет Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т. Механические характеристики используемых материалов приведены в [1]. Толщины слоев: $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$, $h_3 = h_5 = 0,1$. Перемещения и сдвиги рассчитывались по формулам (9), (10).

Рисунок 2 иллюстрирует зависимость перемещений в базовой модели от материала нижнего заполнителя: 1 – фторопласт-4; 2 – пенопласт; 3 – пенополиуретан. Материалы остальных слоев и их толщины соответствуют базовой модели.

Результаты расчета показали, что при замене фторопласта-4 на пенопласт перемещения увеличиваются: прогиб – примерно в 1,6 раза, относительный сдвиг ψ_1 – на 54 %; ψ_2 – на 61 %. При использовании пенополиуретана прогиб увеличивается в 1,8 раза, сдвиг ψ_1 – на 62 %; ψ_2 – на 71 %.

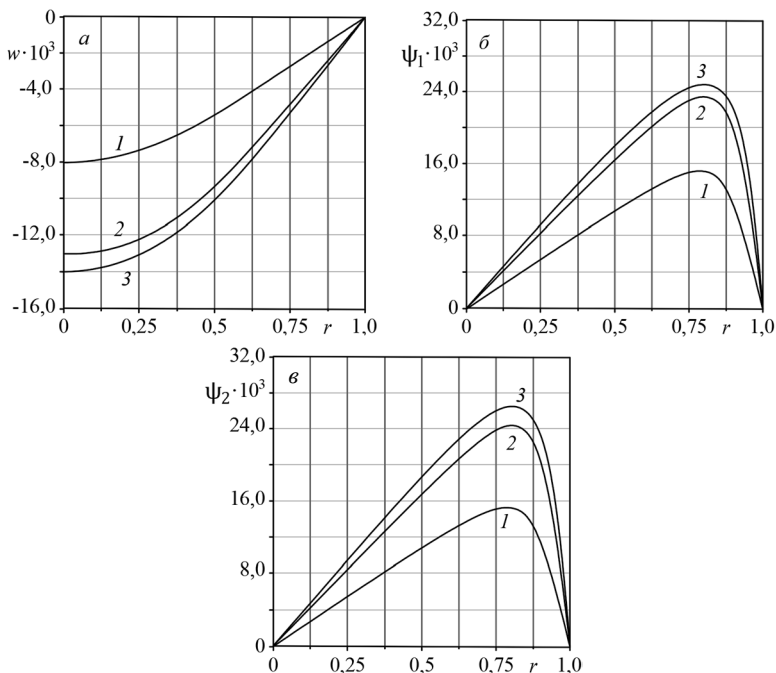


Рисунок 2 – Влияние материала нижнего заполнителя на перемещения w (а), ψ_1 (б), ψ_2 (в)

Заключение. Рассмотренная математическая модель позволяет анализировать влияние геометрической и физической несимметричности пятислойной упругой круглой пластины на ее напряженно-деформированное состояние при непрерывных и локальных кольцевых нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.

2 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

4 Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev , E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, is. 4. – P. 699–704.

5 Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

6 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

8 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

9 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

10 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

11 **Мовчан, А. А.** Учет нелинейности диаграммы перехода и изменения упругого модуля во внешних слоях трехслойной полосы из сплава с памятью формы и вязкоупругим внутренним слоем / А. А. Мовчан // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 2. – С. 272–292.

12 **Белов, П. А.** Вариационная постановка задач обратимой термомеханики для слоистых структур / П. А. Белов, С. А. Лурье // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т. 30, № 1. – С. 101–117.

13 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.

15 **Салицкий, В. С.** Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 114–119.

16 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

V. S. SALITSKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

DEFORMATION OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE ASYMMETRICAL IN THICKNESS

The boundary value problem is presented for the bending of an elastic circular five-layer plate, asymmetric in thickness, with two fillers. The deformation of the load-bearing layers satisfies Kirchhoff's hypotheses, while that of relatively thick cores satisfies the Timoshenko's hypothesis. Using the Lagrange variational method, the equilibrium equations are obtained, taking into account the work of shear stresses in the cores. A fourth-order inhomogeneous differential equation with respect to shear in one of the cores is extracted from the system. The solution to the corresponding homogeneous equation is reduced to solving two modified second-order Bessel equations. The general solution to the inhomogeneous equation is written out in its final form. An example of numerical calculation is provided.

Keywords: circular five-layer plate, thickness asymmetry, analytical solution, numerical results.

Получено 01.09.2025

УДК 691-419:539.374

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, В. С. САЛИЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

Предлагается модель несимметричной по толщине пятислойной круговой пластины, в которой одни слои деформируются упруго, другие проявляют пластические свойства. Для описания неупругого поведения используются уравнения теории малых упругопластических деформаций. Гипотезы Кирхгофа описывают деформирование несущих слоев, гипотеза Тимошенко – заполнителей. Для решения краевой задачи использован метод упругих решений Ильюшина. Приведены результаты численных расчетов на основе полученного в итерационном виде решения.

Ключевые слова: пятислойная несимметричная пластина, изгиб, упругость, пластичность, аналитическое решение.

Введение. В связи с расширяющимся применением в машиностроении и строительстве слоистых элементов появляется необходимость разработки механико-математических моделей таких конструкций с учетом линейного и нелинейного деформирования материалов слоев. В монографиях [1, 2] предложены различные подходы к разработке расчетных моделей слоистых конструкций, проявляющих в процессе деформирования упругие и пластические свойства. Тонкие несущие слои приняты достаточно жесткими, для них выполняются гипотезы Кирхгофа. Заполнители легкие, для них справедлива гипотеза Тимошенко, то есть учитывается деформация относительного сдвига.

Динамическое деформирование трехслойных цилиндрических оболочек под действием локальных нагрузок анализировалось в статьях [3, 4]. Анализ собственных и вынужденных колебаний стержней, включающих три и пять слоев, приведен в [5, 6]. Динамическое деформирование, обусловленное внешним воздействием на трех- и пятислойные круговые пластины, рассмотрено в статьях [7, 8]. Для решения названных задач использован метод разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций.

Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, расположенной на двухпараметрическом упругом основании, исследованы в статье [9]. Постановки и решения иных краевых задач о деформировании трехслойных упругих стержней и круговых пластин, связанных с упругими однопараметрическими и двухпараметрическими основаниями, рассмотрены в статьях [10, 11]. Изгиб трехслойных упругопластических пластин при термосиловых нагрузках изучался в работах [12, 13]. Деформирование упругих пятислойных симметричных и несимметричных по толщине круговых пластин под действием непрерывных и локальных нагрузок исследовано в статьях [14–16].

В данной работе разрабатывается математическая модель пятислойной пластины, в которой часть несущих слоев деформируется неупруго.

1 Постановка задачи. Исследуется осесимметричный изгиб несимметричной по толщине круговой пятислойной пластины нагрузкой $q(r)$ (рисунок 1). Принимаются кинематические допущения: для тонких жестких несущих слоев 1, 2, 4 – гипотезы Кирхгофа; для заполнителей 3, 5 – гипотеза Тимошенко, учитывающая дополнительные повороты нормалей на углы $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ – относительные сдвиги в верхнем и нижнем заполнителях. Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью несущего слоя 1. Подлежат определению: прогиб пластины $w(r)$, углы $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ и радиальное перемещение $u(r)$ срединной плоскости центрального слоя.

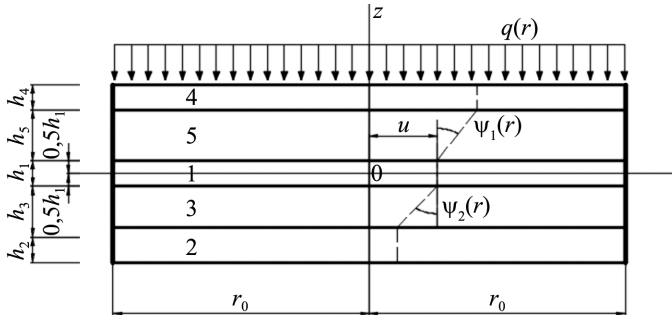


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Выражения радиальных перемещений в слоях через искомые функции:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, \quad -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1, \\
 u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\psi_2, \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3 \\
 u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi_2, \quad -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1, \\
 u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5\psi_1, \quad 0,5h_1 + h_5 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5 + h_4, \\
 u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi_1, \quad 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где h_k – толщина k -го слоя.

Деформации следуют из соотношений Коши [2] и перемещений (1). Деформирование верхнего защитного несущего слоя 4 и заполнителей 3, 5 (см. рисунок 1) предполагается упругим, подчиняющимся закону Гука. Физические характеристики несущих слоев 1, 2 нелинейные, для них справедливы соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \left(1 - \omega_k(\epsilon_u^{(k)})\right) \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \epsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2), \quad (2)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\vartheta_\alpha^{(k)}$ – девиаторная часть, $\sigma^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвига и объемной дефор-

магии; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций [2]; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести.

Введем в рассмотрение обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int \sigma_\alpha^{(k)} z dz;$$

$$Q_1 = \int_{h_5} \sigma_{rz}^{(5)} dz; \quad Q_2 = \int_{h_3} \sigma_{rz}^{(3)} dz;$$

$$H_{1\alpha} = h_5 T_\alpha^{(4)} + M_\alpha^{(5)} - 0,5 h_1 T_\alpha^{(5)}; \quad H_{2\alpha} = -h_3 T_\alpha^{(2)} + M_\alpha^{(3)} + 0,5 h_1 T_\alpha^{(3)}, \quad (3)$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}$ – нормальные напряжения ($\alpha = r, \varphi$).

Используя соотношения (2), компоненты напряжений представим в виде суммы упругой (индекс «e») и нелинейной «ω» составляющих:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}; \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2);$$

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}; \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)}. \quad (4)$$

Аналогично поступаем с внутренними усилиями (3):

$$T_\alpha^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}; \quad M_\alpha^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2). \quad (5)$$

Входящие в (5) упругие $T_{\alpha e}^{(k)}, M_{\alpha e}^{(k)}, Q_{ie}$ и нелинейные $T_{\alpha \omega}^{(k)}, M_{\alpha \omega}^{(k)}, Q_{i\omega}$ составляющие вычисляются по формулам (3), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ следует заменить на выражение (4), содержащее величины $\sigma_{\alpha e}^{(k)}, \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$.

В итоге суммарные внутренние усилия принимают вид

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} \equiv \sum_{k=1}^5 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^2 T_{\alpha \omega}^{(k)}; \quad M_\alpha = M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} \equiv \sum_{k=1}^5 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^2 M_{\alpha \omega}^{(k)};$$

$$H_{1\alpha} = H_{1\alpha e} - H_{1\alpha \omega}; \quad H_{1\alpha e} = h_5 T_{\alpha e}^{(4)} + M_{\alpha e}^{(5)} - 0,5 h_1 T_{\alpha e}^{(5)}; \quad H_{1\alpha \omega} = h_5 T_{\alpha \omega}^{(4)};$$

$$H_{2\alpha} = H_{2\alpha e} - H_{2\alpha \omega}; \quad H_{1\alpha e} = -h_3 T_{\alpha e}^{(2)} + M_{\alpha e}^{(3)} - 0,5 h_1 T_{\alpha e}^{(3)}; \quad H_{2\alpha \omega} = -h_3 T_{\alpha \omega}^{(2)}. \quad (6)$$

Полученная в [15] система дифференциальных уравнений равновесия пластины во внутренних обобщенных усилиях справедлива и здесь, так как при ее выводе не был использован закон Гука. С учетом (6) она приобретает вид

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \quad H_{1r,r} + \frac{1}{r}(H_{1r} - H_{1\varphi}) - Q_1 = h_{1\omega},$$

$$H_{2r,r} + \frac{1}{r}(H_{2r} - H_{2\varphi}) - Q_2 = h_{2\omega}, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q + q_\omega. \quad (7)$$

Здесь слева от знака равенства находятся упругие составляющие внутренних усилий, в которых индекс «e» опущен для простоты. Они выражают

ся через искомые функции формулами, приведенными в [15]. Справа располагаются слагаемые с индексом « ω », учитывающие физическую нелинейность материалов слоев:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}); \quad h_{1\omega} = H_{1r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{1r\omega} - H_{1\varphi\omega}); \\ h_{2\omega} &= H_{2r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{2r\omega} - H_{2\varphi\omega}); \quad q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Соответственно следующая из (7) система уравнений равновесия в перемещениях пластины с упругопластическими слоями имеет вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\Psi_1 - a_3\Psi_2 - a_4w_r) &= p_\omega; \quad L_2(a_2u + a_5\Psi_1 - a_6w_r) - h_5G_5\Psi_1 = h_{1\omega}; \\ L_2(-a_3u + a_7\Psi_2 - a_8w_r) - h_3G_3\Psi_2 &= h_{2\omega}; \\ L_3(a_4u + a_6\Psi_1 + a_8\Psi_2 - a_9w_r) &= -q + q_\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где L_i – дифференциальные операторы:

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

a_i – коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_4^+ h_4 + K_5^+ h_5 + K_1^+ h_1 + K_3^+ h_3 + K_2^+ h_2; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k; \\ a_2 &= K_5^+ \frac{h_5^2}{2} + K_4^+ h_4 h_5; \quad a_3 = K_3^+ \frac{h_3^2}{2} + K_2^+ h_2 h_3; \\ a_4 &= K_4^+ \frac{h_4}{2}(h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ \frac{h_5}{2}(h_1 + h_5) - K_3^+ \frac{h_3}{2}(h_1 + h_3) - K_2^+ \frac{h_2}{2}(h_1 + 2h_3 + h_2); \\ a_5 &= K_4^+ h_4 h_5^2 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3}; \quad a_6 = K_4^+ \frac{h_4 h_5}{2}(h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right); \\ a_7 &= K_2^+ h_2 h_3^2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3}; \quad a_8 = K_2^+ \frac{h_2 h_3}{2}(h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right); \\ a_9 &= K_4^+ h_4 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_4}{2} + h_1 h_5 + \frac{h_4^2}{3} + h_4 h_5 + h_5^2 \right) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + \\ &+ K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right). \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (9) является нелинейной, поэтому для ее решения воспользуемся методом линейных последовательных приближений, основанном на методе «упругих» решений Ильюшина. В этом случае на каждом шаге итерации рассматриваемая задача сводится к соот-

ветствующей задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками, а система (9) принимает следующий итерационный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \Psi - a_3 \Psi_2^{(n)} - a_4 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_5 \Psi_1^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) - h_5 G_5 \Psi_1^{(n)} &= h_{1\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(-a_3 u^{(n)} + a_7 \Psi_2^{(n)} - a_8 w_{,r}^{(n)}) - h_3 G_3 \Psi_2^{(n)} &= h_{2\omega}^{(n-1)}; \\ L_3(a_4 u^{(n)} + a_6 \Psi_1^{(n)} + a_8 \Psi_2^{(n)} - a_9 w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где n – номер приближения.

Для жестко заделанного контура пластины

$$\Psi_1^{(n)}(r_0) = \Psi_2^{(n)}(r_0) = w^{(n)}(r_0) = w_{,r}^{(n)}(r_0) = u^{(n)}(r_0) = 0. \quad (11)$$

При шарнирном опирании с учетом наличия жесткой диафрагмы на контуре, препятствующем относительному сдвигу слоев, выполняются условия

$$u^{(n)}(r_0) = \Psi_1^{(n)}(r_0) = \Psi_2^{(n)}(r_0) = w^{(n)}(r_0) = 0; \quad M_r^{(n)}(r_0) = M_{r\omega}^{(n-1)}(r_0). \quad (12)$$

На первом шаге нелинейные добавки в (10) полагаются равными нулю

$$p_{\omega}^{(0)} = h_{1\omega}^{(0)} = h_{2\omega}^{(0)} = q_{\omega}^{(0)} = 0.$$

При последующих итерациях они вычисляются на основе предыдущего приближения с использованием формул типа (8):

$$\begin{aligned} q_{\omega}^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} - M_{\varphi\omega}^{(n-1)}{}_{,r}); \quad p_{\omega}^{(n-1)} = T_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)}); \\ h_{1\omega}^{(n-1)} &= H_{1r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{1r\omega}^{(n-1)} - H_{1\varphi\omega}^{(n-1)}); \quad h_{2\omega}^{(n-1)} = H_{2r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{2r\omega}^{(n-1)} - H_{2\varphi\omega}^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (13)$$

Нелинейные составляющие в (12), (13):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^2 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^2 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^2 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^2 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz, \\ H_{1\alpha\omega}^{(n-1)} &= h_5 T_{\alpha\omega}^{(4,n-1)}, \quad H_{2\alpha\omega}^{(n-1)} = -h_3 T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)} \quad (\alpha = r, \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

2 Аналитическое решение. Используя методику решения подобной системы уравнений [15], решение системы (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta_1 r) + C_4^{(n)} I_1(\beta_2 r) + \Psi_{1r}^{(n)}, \\ \Psi_2^{(n)} &= C_2^{(n)} k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4^{(n)} k_2 I_1(\beta_2 r) + \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) + \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} \Psi_{1r}^{(n)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)}}{b_2 h_3 G_3} + \frac{b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1}{b_2 h_3 G_3} \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1 b_2 h_3 G_3} p_\omega^{(n-1)}; \\
w^{(n)} = & - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} \right) \int \Psi_{1r}^{(n)} dr - \frac{\gamma_2 (b_2^2 - b_1 b_3)}{b_2 h_3 G_3} \int L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) dr - \frac{\gamma_2 (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{b_2 h_3 G_3} \times \\
& \times \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{a_4}{a_1} \int p_\omega^{(n-1)} dr \right) - \frac{\gamma_2}{b_2 h_3 G_3} \left(b_3 \int h_{1\omega}^{(n-1)} dr - b_2 \int h_{2\omega}^{(n-1)} dr - \right. \\
& - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1} \int p_\omega^{(n-1)} dr \left. \right) - \gamma \left(\int (L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)})) dr + \frac{a_4}{a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \right) - \\
& - C_2^{(n)} \frac{I_0(\beta_1 r)(\gamma_1 + \gamma_2 k_1)}{\beta_1} - C_4^{(n)} \frac{I_0(\beta_2 r)(\gamma_1 + \gamma_2 k_2)}{\beta_2} + \frac{C_6^{(n)} r^2}{2} + C_8; \\
u^{(n)} = & \left(\frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1} \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} - \frac{a_2 + a_4 \gamma_1}{a_1} \right) \Psi_{1r}^{(n)} + \frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1} \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) + \quad (15) \\
& + \frac{L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)})}{a_1} - \frac{a_4}{a_1} \gamma \left(L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \right) + \frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1 b_2 h_3 G_3} \times \\
& \times \left(b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)} + (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1) \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) + \\
& + \frac{a_2 + \gamma_1 a_4 - k_1 (a_3 - \gamma_2 a_4)}{a_1} C_2^{(n)} I_1(\beta_1 r) + \frac{a_2 + \gamma_1 a_4 - k_2 (a_3 - \gamma_2 a_4)}{a_1} C_4^{(n)} I_1(\beta_1 r) + C_9^{(n)} r,
\end{aligned}$$

где учтено, что из условия ограниченности перемещений в центре пластины константы $C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = C_{10} = 0$; I_1 – функции Бесселя; $\Psi_{1r}^{(n)}$ – частное решение уравнения Бесселя для сдвига ψ_1 ; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_i^{-1} – интегральные операторы

$$L_1^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int r g dr, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int_r \int_r \int_r r g dr dr dr;$$

$$b_1 = \frac{a_5 a_4^2 - a_1 a_5 a_9 + a_2^2 a_9 - 2 a_2 a_4 a_6 + a_1 a_6^2}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_6 - a_2 a_4 a_8 - a_2 a_3 a_9}{a_4^2 - a_1 a_9};$$

$$b_3 = \frac{a_4^2 a_7 - a_1 a_7 a_9 + 2 a_3 a_4 a_8 + a_3^2 a_9 + a_1 a_8^2}{a_4^2 - a_1 a_9};$$

$$\gamma = \frac{a_1}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_1 = \frac{a_1 a_6 - a_2 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_2 = \frac{a_1 a_8 + a_3 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}.$$

При жестком защемлении контура пластины остальные константы интегрирования получим, удовлетворяя решением (15) условиям (11):

$$\begin{aligned}
 C_2^{(n)} &= -C_4^{(n)} \frac{I_1(\beta_2 r_0)}{I_1(\beta_1 r_0)} - \frac{\Psi_{1r}^{(n)} \Big|_{r=r_0}}{I_1(\beta_1 r_0)}, \\
 C_4^{(n)} &= \left[\frac{h_5 G_5 b_3 - k_1 h_3 G_3 b_2}{h_3 G_3 b_2 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} \Psi_{1r}^{(n)} + \frac{L_2(\Psi_{1r}^{(n)})}{I_1(\beta_2 r_0)(\beta_1^2 - \beta_2^2)} + \frac{b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)}}{b_2 h_3 G_3 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1}{b_2 h_3 G_3 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1 b_2 h_3 G_3 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} p_\omega^{(n-1)} \right] \Bigg|_{r=r_0}, \\
 C_6^{(n)} &= \frac{\gamma}{r_0} \left(L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \right) \Bigg|_{r=r_0}, \\
 C_8^{(n)} &= \gamma \left(\int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{a_4}{a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \right) \Bigg|_{r=r_0} - \frac{C_6^{(n)} r_0^2}{2}, \\
 C_9^{(n)} &= -\frac{1}{a_1 r_0} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Bigg|_{r=r_0}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Таким образом, итерационные формулы (15), (16) с учетом (13), (14) позволяют вычислять перемещения при изгибе круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины с упругими и упругопластическими слоями. При шарнирном закреплении контура константы интегрирования следуют из условий (12).

Численные результаты получены для пластины единичного радиуса со слоями: кордиерит–фторопласт–4–дюралюминий–фторопласт–4–дюралюминий, контур которой защемлен. Толщины слоев, отнесенные к радиусу r_0 , $h_1 = h_2 = h_4 = 0,01$, $h_3 = h_5 = 0,1$. Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (2), (4) приняты в виде

$$\omega_k(\epsilon_u) = \begin{cases} 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_y, \\ A_k (1 - \epsilon_y^{(k)} / \epsilon_u)^{\alpha_k}, & \epsilon_u > \epsilon_y. \end{cases}$$

Механические характеристики материалов: для кордиерита $G_4 = 258$ ГПа, $K_4 = 558$ ГПа; для дюралюминия $G_1 = 26,7$ ГПа, $K_1 = 80$ ГПа, $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\epsilon_y^{(1)} = 0,735$ %; для фторопласта–4 – $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа [2]. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q_0 = -20$ МПа.

На рисунке 2 показаны графики изменения перемещений вдоль радиуса пластины. Четвертые приближения приняты за физически нелинейные перемещения, их отличие от предыдущих составляет менее 1 %, что свидетельствует о достаточно быстрой сходимости итерационного процесса.

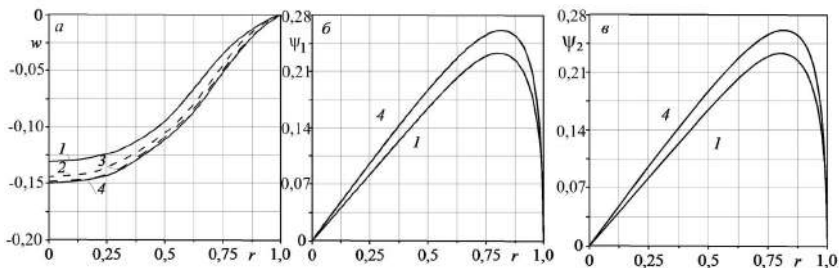


Рисунок 2 – Перемещения (а – прогиб w ; относительные сдвиги б – ψ_1 , в – ψ_2) в пятислойной пластине с кордиеритовым внешним слоем:

1 – упругие; 2, 3 – второе и третье приближения; 4 – физически нелинейные

В рассматриваемой пластине за счет учета упругопластических свойств двух несущих слоев перемещения на 12,8 % больше, чем у упругой пластины. Радиальные перемещения малы, они на три порядка меньше прогиба и сдвигов, поэтому на пластическое деформирование влияния практически не оказывают.

Выводы. Численные результаты подтвердили необходимость учета физически нелинейных свойств материалов слоев при изгибе пятислойной несимметричной по толщине пластины с двумя упругопластическими несущими слоями. Приведенные итерационные формулы позволяют вычислять перемещения в пятислойных пластинах и могут применяться в прочностных расчетах машиностроительных организаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.

2 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

3 Leonenko, D. V. Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, is. 4. – P. 359–367.

4 Semenov, A. A. Dynamic buckling analysis of doubly curved orthotropic shallow shells via the Kantorovich and Rosenbrock methods / A. A. Semenov // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2024. – Vol. 46, is. 7. – Article 410.

5 Горшков, А. Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.

6 Будникова, Д. А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

7 Лачугина, Е. А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

8 Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

9 Erofeev, V. I. Dispersion and energy characteristics of bending waves in a plate lying on a two-parameter elastic foundation / V. I. Erofeev, E. E. Lisenkova // Acoustical Physics. – 2023. – Vol. 69, is. 3. – P. 285–291.

10 Козел, А. Г. Термоупругопластический изгиб трехслойной круглой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 100–108.

11 Старовойтов, Э. И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

12 Захарчук, Ю. В. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 10. – С. 80–87.

13 Старовойтов, Э. И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

14 Салицкий, В. С. Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

15 Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

16 Салицкий, В. С. Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 114–119.

E. I. STAROVOITOV, V. S. SALICKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

DEFORMATION OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE WITH ELASTIC AND ELASTOPLASTIC LAYERS

A model of a five-layer circular plate, asymmetric in thickness, is proposed; some layers are deformed elastically, while others exhibit plastic properties. The inelastic behavior is described by the equations of small elastoplastic deformation theory. The Kirchhoff's hypotheses describes the deformation of the load-bearing layers, while the Timoshenko's hypothesis describes the deformation of the cores. The Ilyushin's method of elastic solutions is used to solve the boundary-value problem. The results of numerical calculations based on the iterative solution are presented.

Keywords: five-layer asymmetric plate, bending, elasticity, plasticity, analytical solution.

Получено 29.10.2025

УДК 539.31:624.072.2

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, К. В. СУСЛОВ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ИЗГИБЕ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ С ДВУМЯ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ

Представлено аналитическое решение краевой задачи об изгибе пятислойного симметричного по толщине стержня, в котором несущими являются тонкие внешние и центральный слои, а относительно толстые жесткие заполнители обеспечивают перераспределение нагрузок между несущими слоями. На основе решения системы дифференциальных уравнений равновесия получены расчетные формулы для перемещений в случаях жесткой заделки и шарнирного опирания торцов стержня. Приведены результаты расчета напряжений и деформаций для нагрузки, равномерно распределенной по поверхности верхнего слоя.

Ключевые слова: пятислойный стержень, упругая деформация, гипотеза Бернулли, гипотеза Тимошенко.

Введение. Применение слоистых конструкций в различных сферах современной техники стимулировало разработку методик их прочностного расчета при статических и динамических нагрузках. В монографиях [1, 2] предложены расчетные модели трехслойных стержней, пластин и оболочек, учитывающие не только различные внешние силовые нагрузки, но и влияние температурных и радиационных воздействий.

В статьях [3–5] приведены решения ряда частных задач о динамическом воздействии на композитные стержни и пластины, в которых кинематические гипотезы приняты индивидуально для каждого слоя. Несущие слои жесткие, подчиняются гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация поперечного сдвига. В статье [6] предложена дискретная модель многослойной пластины с учетом внутреннего демпфирования слоев в соответствии с моделью Томпсона – Кельвина – Войта. Получено аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях двух- и трехслойных прямоугольных шарнирно закрепленных пластин, при прохождении через них моногармонической звуковой волны. Анализ собственных колебаний пятислойных пластин и стержней проводится в [7, 8].

Влияние сжимаемости заполнителя на деформирование трехслойной пластины исследовано в [9], функция сжимаемости принята линейной по толщине заполнителя. Термосиловое деформирование круговых упругопластических пластин нагрузкой, параллельной плоскости пластины, рассмотрено в [10], перпендикулярной – в [11]. Влияние упругого основания на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин исследуется в рабо-

тах [12, 13]. Решение задачи об изгибе круговой пятислойной пластины, заземленной по контуру, представлено в [14].

В статье [15] были получены дифференциальные уравнения равновесия симметричного по толщине пятислойного стержня с двумя заполнителями. В данной работе рассматривается решение задачи об изгибе такого стержня.

Постановка задачи об изгибе пятислойного стержня. В пятислойном, симметричном по толщине стержне (рисунок 1) деформирование достаточно тонких несущих слоев 1, 2, 4 подчиняется гипотезе Бернулли, а сравнительно толстых заполнителей 3, 5 – гипотезе Тимошенко, учитывающей поворот нормали на дополнительный угол $\psi(x)$, называемый относительным сдвигом. Наряду с прогибом стержня $w(x)$ эта функция является искомой. Декартова система координат связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. Нагрузка q равномерно распределена по внешней поверхности верхнего слоя.

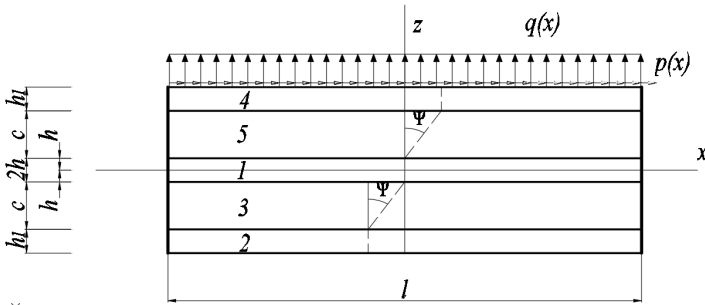


Рисунок 1 – Схема деформирования пятислойного стержня при его изгибе

Продольные перемещения $u_x^{(k)}$ в слоях ($k = 1, \dots, 5$ – номер слоя) выражаются в соответствии с принятыми гипотезами через искомые функции:

$$\begin{aligned}
 u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi && \text{при } c + h \leq z \leq c + h + h_1; \\
 u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi && \text{при } h \leq z \leq c + h; \\
 u_x^{(1)} &= -zw_{,x} && \text{при } -h \leq z \leq h; \\
 u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi && \text{при } -h - c \leq z \leq -h; \\
 u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi && \text{при } -h - h_1 - c \leq z \leq -h - c,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; h, h_1, c – толщины слоев, запятая в индексе обозначает дифференцирование по координате x .

Используя выражения (1) и соотношения Коши [1], получим продольные деформации (нумерация в соответствии с рисунком 1):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; && \epsilon_{xz}^{(4)} = 0; \\
 \epsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}; && \epsilon_{xz}^{(5)} = \frac{\psi}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0; \\
\varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\Psi}{2}; \\
\varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Напряжения в слоях определяются через деформации (2) с помощью закона Гука в девятиорно-шаровой форме

$$\begin{aligned}
s_{xx}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}; \\
s_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – девятиоры тензоров напряжений и деформаций, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – средние напряжения и деформации в слоях; G_k , K_k – модули упругости материалов слоев.

Система дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого стержня получена в [14]:

$$\begin{aligned}
a_1 \Psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \Psi &= 0, \\
a_2 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $a_1 = c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right)$; $a_2 = \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c)$; $a_3 = 2G^{(2)} c$;

$$a_4 = \frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)).$$

Для замыкания краевой задачи к системе (4) необходимо добавить граничные условия. Например, при жесткой заделке торцов стержня ($x = 0; l$):

$$\Psi(x) = w(x) = w_{,x}(x, t) = 0. \tag{5}$$

При шарнирном опирании ограничения на торцах следующие:

$$\begin{aligned}
\Psi(0, t) = w(0, t) = M_x(0, t) &= 0, \\
\Psi(l, t) = w(l, t) = M_x(l, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналитическое решение краевой задачи. Проинтегрируем второе уравнение системы (4) и с его помощью из первого уравнения получим отдельное уравнение для определения относительного сдвига $\Psi(x)$:

$$\Psi_{,xx} - \beta^2 \Psi = \gamma q x + C_1, \tag{7}$$

где C_1 – константа интегрирования,

$$\beta^2 = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Вид решения уравнения (7) зависит от знака перед коэффициентом β^2 . Численное исследование показало, что разность $a_1 a_4 - a_2^2 > 0$ и не уходит в бесконечность [14]. Таким образом, относительный сдвиг и прогиб стержня, следующий из второго уравнения системы (4),

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{\gamma q_0 x}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2}; \\ w &= \frac{a_2}{a_4} \left(\frac{C_2}{\beta} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{C_3}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) \right) - \frac{a_2 \gamma q_0 x^2}{2a_4 \beta^2} + \frac{q_0}{24a_4} x^4 + C_1 \left(-\frac{a_2 \gamma}{a_4 \beta^2} x + \frac{1}{6a_4} x^3 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} C_4 x^2 - C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (8)$$

Удовлетворяя решением (8) требованиям (5), получим алгебраическую систему уравнений для определения констант интегрирования при жесткой заделке торцов стержня. Ее решение:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta l (\beta^2 l^3 + 12a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - 24\beta a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2l\beta (6\gamma(l+1)a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 24a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1)}; \\ C_2 &= \frac{((\beta^3 l^4 + 12a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - 24a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2l\beta (6\gamma(l+1)a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 24a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1)}; \\ C_3 &= \frac{g (\beta l (\beta^2 l^3 + 12a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - 24a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2\beta^2 (\beta l (6\gamma(l+1)a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 12a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1))}; \\ C_4 &= - \left[\frac{\beta l (72\gamma^2 (l+2)(l-1)a_2^2 - 6\beta^2 \gamma l^2 (l^2 + l - 4)a_2 + \beta^4 l^5) \operatorname{sh}(\beta l)}{12l\beta^2 a_4 (\beta l (6\gamma(l+1)a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 12a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{24 (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) a_2 \gamma (-6\gamma(l+2)(l-1)a_2 + \beta^2 l^2 (l^2 + l - 3))}{12l\beta^2 a_4 (\beta l (6\gamma(l+1)a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 12a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)(l+1))} \right] q_0; \\ C_5 &= 0; \\ C_6 &= \frac{a_2 ((-\beta^3 l^4 - 12\beta a_2 \gamma l) \operatorname{ch}(\beta l) + \beta^3 l^5 - 2\beta^3 l^3 - 12\beta a_2 \gamma l + \operatorname{sh}(\beta l) a_2 \gamma) g q_0}{2\beta^3 a_4 (-12\gamma(l+1)a_2 \operatorname{ch}(\beta l) + \beta l (g\gamma(l+1)a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) + 12\gamma(l+1)a_2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Константы интегрирования для случая шарнирного опирания торцов стержня получим, удовлетворяя решением (8) граничным условиям (6). Соответствующая система алгебраических уравнений

$$C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l) - \frac{\gamma q_0 l}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} = 0; \quad C_3 - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2}{3} K_2^+ c(c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] \times \\
& \quad \times \left[\frac{a_2}{a_4} \beta (C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0}{a_4 \beta^2} + C_1 \frac{l}{a_4} + \frac{q_0 l^2}{2a_4} - C_4 \right] + \\
& + \left[K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2(3h + 2c) \right] \cdot \left[\beta C_2 \operatorname{ch}(\beta l) + \beta C_3 \operatorname{sh}(\beta l) - \frac{\gamma q_0}{\beta^2} \right] = 0 ; \\
& - \left[\frac{2}{3} K_2^+ c(c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] \times \\
& \times \left[\frac{\beta C_2 a_2}{a_4} + C_4 - \frac{a_2 \gamma q_0}{a_4 \beta^2} \right] + \left[K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2(3h + 2c) \right] \cdot \left[\beta C_2 - \frac{\gamma q_0}{\beta^2} \right] = 0 ; \\
& \frac{a_2}{a_4 \beta} C_2 + C_6 = 0 ; \\
& \frac{a_2}{a_4 \beta} (C_2 \operatorname{ch}(\beta l) + C_3 \operatorname{sh}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0 l^2}{2a_4 \beta^2} + \frac{C_1 l^3}{6a_4} - \frac{C_1 a_2 \gamma l}{a_4 \beta^2} + \frac{q_0 l^4}{24a_4} - \frac{C_4 l^2}{2} - l C_5 + C_6 = 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Решение систем уравнений (9), (10) дает искомые константы интегрирования.

Численные результаты получены для случая равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 2,5$ МПа. Для основной расчетной модели принимались несущие слои, выполненные из дюралюминия Д16-Т, заполнители – из фторопласта-4. Их упругие характеристики принимались по [1]. Толщины слоев, отнесенные к длине стержня, в (8)–(10) полагались $h = h_1 = 0,02$; $c = 0,1$; $l = 1$ м.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение прогиба (a) и относительного сдвига (b) вдоль оси стержня при различных способах закрепления торцов: 1 – жесткая заделка; 2 – шарнирное опирание. Прогиб при шарнирном опирании примерно в 5 раз больше, чем при заделке. Это хорошо согласуется с аналогичным деформированием однослойного стержня [4]. На относительный сдвиг изменение граничных условий в данном случае не влияет.

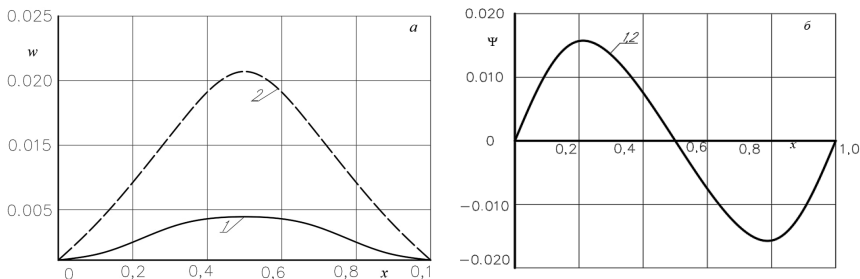


Рисунок 2 – Изменение по длине стержня x : a – прогиба; b – относительного сдвига

Рисунок 3 иллюстрирует изменение линейных деформаций (*a*) и продольных напряжений (*б*) на торце стержня ($x = 0$) при различных граничных условиях: 1 – жесткая заделка; 2 – шарнирное опирание. Линейные деформации здесь непрерывны в силу склейки слоев. Нормальные напряжения в склейках претерпевают разрыв из-за различных упругих свойств материалов несущих слоев и заполнителей. Максимальные деформации не превышают 0,12 %, что подтверждает упругое деформирование материалов слоев.

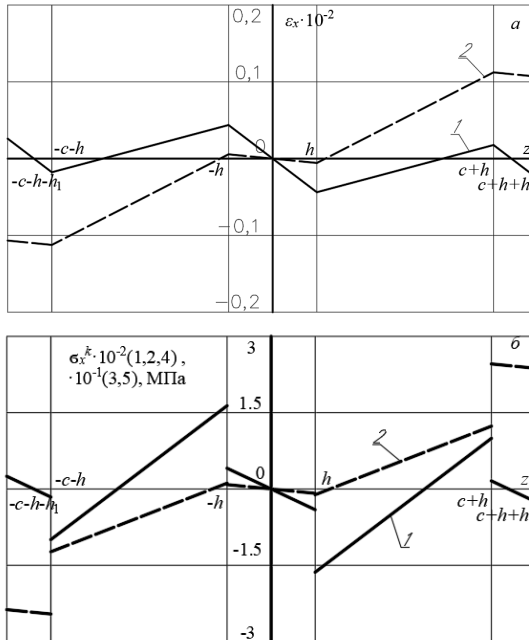


Рисунок 3 – Изменение деформаций (*a*) и напряжений (*б*) по толщине стержня z при $x = 0$

Выводы. Полученное аналитическое решение позволяет осуществлять оценку напряжений и деформаций при изгибе симметричного по толщине пятислойного упругого стержня с двумя заполнителями и принимать решение о целесообразности его применения в конкретных конструкциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 **Tarлакoвskii, D. V.** Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarлакoвskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, is. 2. – P. 145–152.

4 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarлакoвskiy, Y. A. Vahterova // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2019. – Vol. 40, is. 4. – P. 439–447.

5 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

6 **Paimushin, V. N.** Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2017. – Vol. 53, is. 3. – P. 407–436.

7 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

8 **Будникова, Д. А.** Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

9 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

10 **Нестерович, А. В.** Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

11 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

12 Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–19.

13 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

15 **Суслов, К. В.** Методика решения задачи о равновесии пятислойного симметричного по толщине стержня / К. В. Суслов // *Механика. Исследования и инновации*. – 2024. – Вып. 17. – С. 134–139.

E. I. STAROVOITOV, K. V. SUSLOV

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

STRESS-STRAIN STATE IN BENDING A FIVE-LAYER ROD WITH TWO FILLERS

An analytical solution is presented for the boundary value problem of bending of a five-layer rod symmetrical in thickness with the thin outer and central load-bearing layers for the case when relatively thick rigid cores provide load redistribution between the load-bearing layers. Based on the solution of a system of differential equilibrium equations, calculation formulas are obtained for displacements in cases of rigid restraint and pinned support of the rod ends. The results of stress and strain calculations are presented for a load uniformly distributed over the upper layer surface.

Keywords: five-layer rod, elastic deformation, Bernoulli hypothesis, Timoshenko hypothesis.

Получено 01.09.2025

УДК 539.374:539.43

Б. Г. ХОЛОДАРЬ

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Рассмотрены структурные модели, состоящие из упругих и вязких элементов и отражающие известные из экспериментов эффекты поведения материалов, с выделением упругих, остаточных и запаздывающих компонент деформации. Показано, что для учета особенностей трансформации структуры материалов целесообразно применение модели с нелинейной вязкостью, отражающей изменение энергии активации процессов структурных превращений под действием внешних нагрузок. Рассмотрены основные режимы изотермического одноосного нагружения упруго-пластического материала (деформирование с постоянной скоростью, разгрузка, циклические деформации, ползучесть, релаксация напряжений), вязкость которого определяется с использованием диаграммы растяжения. Связь напряжений и деформаций дается дифференциальным уравнением Максвелла первого порядка. Приведены результаты численных расчетов деформирования материалов при их динамическом нагружении.

Ключевые слова: реономные материалы, структурные механические модели, тело Максвелла, трансформация структуры, нелинейная вязкость, режимы нагружения.

Введение. Материалы в условиях эксплуатации обладают сложным набором механических свойств, проявление которых зависит от условий нагружения, в первую очередь таких, как температура, уровень, скорость и длительность воздействия. Материалы, проявляющие в конкретных условиях зависимость свойств от времени, относят к реономным, не проявляющие – к склерономным, соответственно используя различные теоретические подходы к описанию их поведения под нагрузкой. Склерономный подход, например, с применением теорий упругости и пластичности, в большинстве случаев является достаточным для описания работы конструкций. Однако анализ экспериментальных данных указывает на отсутствие однозначной связи не только между напряжениями и деформациями, но и между их скоростями [1, 2] и вызывает необходимость выделения упругой (или мгновенно-обратимой) ε_y , пластической (или остаточной) ε_n и возвратной (или запаздывающе-обратимой, в полимерах – высокоэластической) ε_b компонент деформаций: $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_n + \varepsilon_b$.

Другие виды реализующихся деформаций, например, температурные, влажностные, радиационного происхождения и т. п. здесь не затрагиваем. Важнейшим внешним фактором, определяющим проявление тех или иных особенностей поведения материала, является его гомологическая температура. Ее изменение здесь также не рассматриваем, процессы полагаем изотермическими.

При описании реономных материалов используют структурные механические модели, содержащие упругие и вязкие элементы, призванные отразить связь указанных видов деформаций во времени. Для упругого элемента имеет место однозначная связь напряжений σ и деформаций ε , линейная или нелинейная в общем случае. Скорости остаточных и возвратных деформаций линейным образом выражаются в зависимости от уровня напряжений и деформаций и соответствующей вязкости материала. На рисунке 1

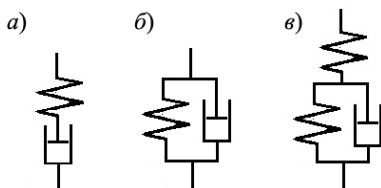


Рисунок 1 – Модели Максвелла (а), Фойхта (б) и Кельвина (в)

показаны модель Максвелла, применяемая для описания вязкоупругого деформирования, модель Фойхта, описывающая материал с последствием (запаздывающим деформированием), и модель Кельвина обобщенного твердого тела, позволяющая описать связь напряжений с упругими, остаточными и возвратными деформациями.

Соответствующие уравнения для одномерного случая имеют вид:

– схема на рисунке 1, а:
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}; \quad (1)$$

– схема на рисунке 1, б:
$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon};$$

– схема на рисунке 1, в:
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - E_{\Sigma}\varepsilon}{\eta},$$

где E – модуль упругости; $E_{\Sigma} = E \cdot E^* / (E + E^*)$ – равновесный (длительный) модуль; E^* – равновесный модуль возвратных (высокоэластических) деформаций [3, 4].

Запаздывающе-обратимые деформации последствия характерны прежде всего для полимеров, где их наличие объясняется стесненностью движений элементов упорядоченной пачечной структуры полимера, вызываемой расположенными между ними хаотично ориентированными цепными макромолекулами [5]. Реализующаяся в каждой точке совместность деформирования материала вызывает замедленность перемещений и поворотов пачечных элементов при реакции на внешнюю нагрузку. В металлах запаздывающе-обратимое деформирование последствием также имеет место, проявляясь, например, очевидным образом через релаксацию напряжений при постоянной деформации до некоторого конечного значения. Как и в полимерах, оно также связано с поворотными модами деформации зерен и выраженным неравновесным характером сложных зернограницных процессов, которые требуют некоторого времени для приспособления структуры материала к напряженно-деформированному состоянию, соответствующему фактическому режиму нагружения [6–9].

Достоинством уравнений с постоянными вязкостями является возможность построения аналитических решений для основных случаев нагружения. Особенности деформирования материала, отражаемые с помощью уравнений такого вида, подробно рассмотрены в [3, 10].

Уточнение описания фактического поведения материалов с постоянными вязкостями на соответствующем отрезке времени при заданном режиме нагружения достигается включением в модель дополнительных вязких элементов или непосредственно элементов Фойхта, что соответственно повышает порядок дифференциальных уравнений (ДУ) и вводит в рассмотрение спектры времен релаксации и запаздывания. От ДУ можно перейти к интегральным уравнениям, используемым в теориях наследственного типа, что, однако, не позволяет избежать всех несоответствий с проявляющимися реальными эффектами деформирования. Введение нелинейной связи между скоростями напряжений $\dot{\sigma}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}$ также принципиальным образом не решает возникающих вопросов.

Одним из наглядных несоответствий является связь напряжений σ и скорости деформирования при $V_\varepsilon = d\varepsilon / dt = \text{const}$. Уравнение

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{V_\varepsilon \eta} \right), \quad (2)$$

описывающее диаграмму растяжения (ДР), при $\eta = \text{const}$ и постоянной V_ε показывает (рассмотрим, например, точку временного сопротивления на ДР): максимальные напряжения пропорциональны V_ε , что не подтверждается опытом, дающим закон, близкий к логарифмическому [10, 11]. Как видно из уравнения (2), при вязкости, экспоненциально зависящей от напряжений, зависимость $\sigma(V_\varepsilon)$ может существенно измениться.

Необходимость использования зависимости подобного типа подтверждают данные как по деформированию, так и по длительной прочности материалов. В основе современной кинетической теории прочности лежат представления об активационном характере процессов разрушения и восстановления атомных связей. Показано [12, 13], что необходимый для нарушения связей уровень энергии активации снижается приложенными внешними напряжениями. Построены уравнения, описывающие поврежденность ω материала, возникающую при нарушении связей, в которой, как и для деформаций, выделяются мгновенно-обратимая, остаточная и запаздывающе-обратимая составляющие [14]. На примере описания долговечности полиэтилена при сложном напряженно-деформированном состоянии показано [15], что гидростатическая (шаровая) и девиаторная компоненты поля напряжений оказывают различное влияние на уровень энергии активации процессов разрыва связей.

С использованием подходов кинетической теории обоснованы и представления об активационном характере развития во времени деформаций материалов. Показано, что начальные уровни энергии активации, используемые для описания процессов развития как поврежденности, так и деформирования материалов, во многих случаях близки или совпадают. Базируясь на этом подходе, построены соответствующие уравнения механики сплошной среды и дано их применение к решению сложных статических и динамических задач для материалов разной природы [4, 16]. Сами уравнения деформирования и развития поврежденности

близки по структуре и легко объединяются в общую систему при решении задач. Изложение многих затронутых вопросов представлено в [17].

Понятие об энергии активации процессов нарушения связей, ее начальном уровне и зависимости от гомологической температуры удобно в физике твердого тела и материаловедении, но в механике сплошной среды более привычными являются понятия вязкости и, соответственно, начальной вязкости процесса деформирования.

Если в уравнение Максвелла (2) ввести вязкость, изменяющуюся по закону

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{-\alpha\sigma},$$

при некоторых постоянных значениях η_0 и α , то ДР изобразится близкой диаграмме Прандтля для идеально-пластического материала с коротким переходом от упругого участка к участку текучести. Поскольку на участке упрочнения реальных ДР металлов происходит значительная закономерная трансформация структуры материала [6–9], естественно выразить изменение вязкости (или энергии активации) с учетом формы участка упрочнения. Возможность получения положительного результата при таком подходе можно продемонстрировать обработкой приведенных в [11] диаграмм растяжения стали К20: на рисунке 2 показаны зависимости $\sigma(\varepsilon)$ и $\omega(\varepsilon)$, приведенные в [14] по найденным единым параметрам для всей серии экспериментальных данных. Видно, что имеют место достаточно близкое соответствие расчетных и экспериментальных кривых во всём диапазоне изменения скоростей деформирования $V_s = 1,66 \cdot 10^{-3}$ (1), $4,28 \cdot 10^{-2}$ (2), $2,47 \cdot 10^{-1}$ (3), 2,13 (4) и 39,0 (5) и практическое совпадение достигнутых деформаций на каждой ДР с моментом разрушения образца ($\omega = 1$). На рисунке 2 единица измерения напряжения – фунт/дюйм², скорости деформирования – час⁻¹, кружочками показаны экспериментальные точки.

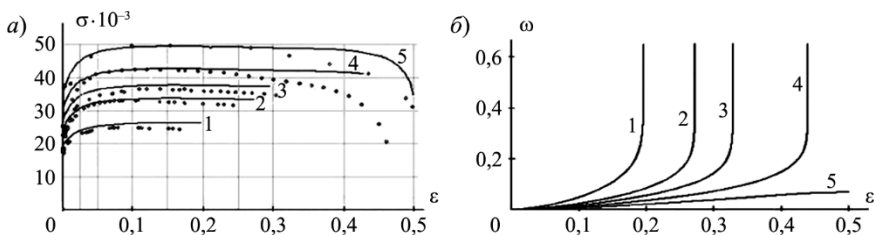


Рисунок 2 – Диаграммы растяжения (а) и нарастания поврежденности (б)

Описание процессов деформирования упруго-пластического материала.

Поскольку при обычной температуре запаздывающие деформации в металлах невелики, рассмотрим в пренебрежении возвратной компонентой особенности поведения некоторого гипотетического упруго-пластического материала для ряда режимов изотермического растяжения-сжатия в широком диапазоне изменения деформаций с тем, чтобы иметь возможность получить более полное представление о механических свойствах такого материала, отражаемых с использованием уравнений данного типа.

Представим, что имеется по крайней мере две ДР, снятые при отличающихся на несколько порядков скоростях деформирования. Одну из них выбираем в качестве базовой и аппроксимируем участок упрочнения некоторой подходящей (в том числе при наличии площадки текучести) функцией $f(\varepsilon)$. Далее будем базовую кривую описывать по участкам:

$$\begin{aligned} & \text{– упругий участок:} & \sigma_{\text{баз}}(\varepsilon) &= E\varepsilon; \\ & \text{– участок упрочнения:} & \sigma_{\text{баз}}(\varepsilon) &= \sigma_{\text{в}} - (\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{т}}) \cdot ((\varepsilon_{\text{в}} - \varepsilon) / (\varepsilon_{\text{в}} - \varepsilon_{\text{т}}))^m, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_{\text{в}}$, $\sigma_{\text{т}}$ – пределы временной прочности и текучести; $\varepsilon_{\text{в}}$, $\varepsilon_{\text{т}}$ – соответствующие им деформации; m – параметр упрочнения.

Чтобы трансформировать формулу (1) в нужную форму, представим вязкость зависимостью

$$\eta = \eta_0 e^{\varphi}; \quad \varphi = [\alpha + \beta \cdot f(\varepsilon)]\sigma = [\alpha + \beta \cdot ((\varepsilon_{\text{в}} - \varepsilon) / (\varepsilon_{\text{в}} - \varepsilon_{\text{т}}))^m]\sigma, \quad (4)$$

где φ – функция упрочнения; η_0 – начальная вязкость; α , β – размерные константы. Значения η_0 , α , β определяют по трем точкам на заданных кривых ДР, пользуясь уравнением (2). Поскольку предел текучести $\sigma_{\text{т}}$ является достаточно неопределенной величиной, в нашем случае выбираем точки пределов прочности $\sigma_{\text{в}}(\varepsilon_{\text{в}})$ на обеих кривых и точку условного предела текучести $\sigma_{0,2}(\varepsilon_{0,2})$ при остаточной деформации $\varepsilon_{\text{ост}} = 0,2$ % на одной из них.

Далее конкретно для ДР было принято: $E = 200$ ГПа; $\sigma_{\text{т1}} = 400$ МПа; $\sigma_{\text{в1}} = 600$ МПа; $\sigma_{\text{в2}} = 300$ МПа; $\varepsilon_{\text{в1}} = \varepsilon_{\text{в2}} = 0,102$; $m = 4$; $V_{\varepsilon1} = 1,0$ с⁻¹; $V_{\varepsilon2} = 1,0 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹. Значения $\sigma_{0,2}$ и $\varepsilon_{0,2}$, получены на базовой кривой по аппроксимации (3): $\sigma_{0,2} \approx 416,14$ МПа, $\varepsilon_{0,2} \approx 4,08 \cdot 10^{-3}$. В результате имеем $\eta_0 = 1,5 \cdot 10^{16}$ Н·с/м²; $\alpha = -2,84 \cdot 10^{-8}$ м²/Н; $\beta = 1,45 \cdot 10^{-8}$ м²/Н (числа округлены). Для материала, проявляющего одинаковые свойства при растяжении и сжатии, значения напряжений и деформаций в выражении для вязкости материала необходимо использовать в виде их абсолютных величин. Запись функции упрочнения в виде

$$\varphi = [\alpha + \beta \cdot f(|\varepsilon|)] \cdot |\sigma| - \gamma \sigma$$

позволяет учесть различие диаграмм деформирования при растяжении и сжатии ($\sigma_{\text{т сж}} > \sigma_{\text{т раст}}$).

Приводимые ниже численные решения уравнения (1) для рассматриваемых режимов нагружения получены с помощью процедуры Рунге – Кутта – Фельберга с автоматическим выбором шага [18].

На рисунке 3 показаны базовая кривая и расчетные кривые 1 и 2 для принятых значений $V_{\varepsilon1}$ и $V_{\varepsilon2}$. Кружочками отмечена диаграмма сжатия (по абсолютной величине $|\sigma(\varepsilon)|$) при использовании параметра $\gamma = \alpha / 10$, что относительно кривой 1 приводит к увеличению пределов текучести и прочности соответственно на 10 и 12,5 %. Индексами 3 и 4 показан переход на кривой 2 после достижения деформации $\varepsilon = 0,05$ к отличающимся на порядок скоростям $V_{\varepsilon} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹ и $V_{\varepsilon} = 1,0 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹.

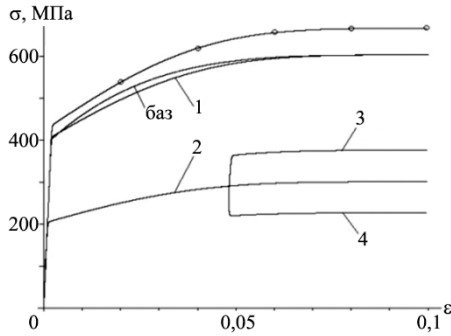


Рисунок 3 – Базовая и расчетные диаграммы деформирования

На рисунке 4, *а* приведено несколько ДР, соответствующих различным значениям V_{ϵ} при одинаковых ϵ_b , и зависимость σ_b и σ_T от логарифма скорости деформирования на рассматриваемом интервале V_{ϵ} (рисунок 4, *б*). В соответствии с (3), (4) в упруго-пластическом теле напряжения при любых одинаковых деформациях также подчиняются логарифмическому закону. Явления запаздывания текучести на ДР не проявляются.

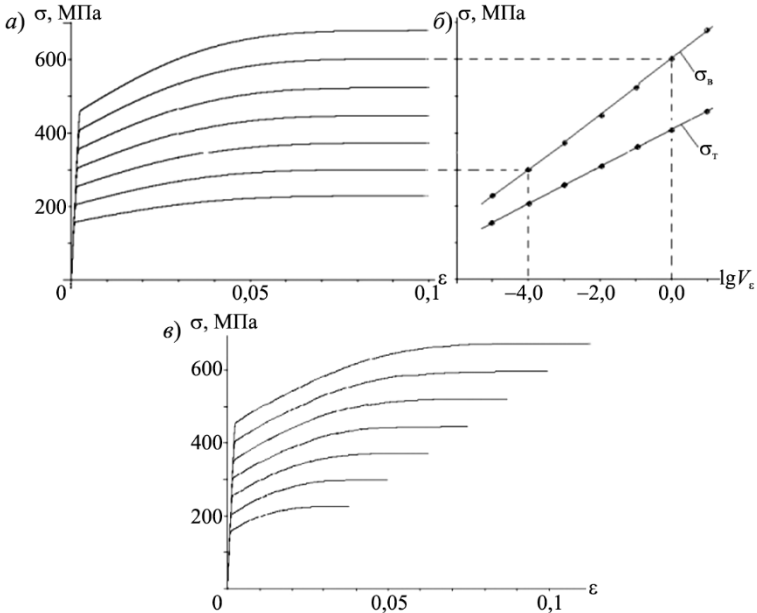


Рисунок 4 – Диаграммы растяжения (*а*, *в*) (*а* – на основе принятых значений $V_{\epsilon 1}$ и $V_{\epsilon 2}$, *в* – сталь К20 для скоростей деформирования, снизу вверх, $V_{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-5}; 1,0 \cdot 10^{-4}; 1,0 \cdot 10^{-3}; 1,0 \cdot 10^{-2}; 1,0 \cdot 10^{-1}; 1,0; 10,0 \text{ с}^{-1}$) и зависимость пределов прочности и текучести (*б*) от логарифма скорости деформирования

В [11] для семейства диаграмм стали К20 указана линейная связь пределов прочности и соответствующих им деформаций: $\sigma_b/\epsilon_b = \text{const}$. Для подобных материалов семейство расчетных ДР приведено на рисунке 4, в. Видно, что зависимость пределов σ_T и σ_b от скорости сохраняется в прежнем виде.

На рисунке 5 показаны диаграммы растяжения в режиме $V_\epsilon = \text{const}$ с промежуточными разгрузками. Скорости нагружения на кривых 1, 2 $V_{\epsilon 1} = 1,0$ и $V_{\epsilon 2} = 1,0 \cdot 10^{-4}$, скорости падения напряжений соответствуют значениям $V_\sigma = V_\epsilon \cdot E$. Точками на кривой 1 отмечена также разгрузка при скорости $V_\sigma/20$. В соответствии с (2) особенностью кривых разгрузки упруго-пластического материала является выполнение условия $d\sigma/d\epsilon = E$ при $\sigma = 0$ для любых уровней деформаций разгрузки.

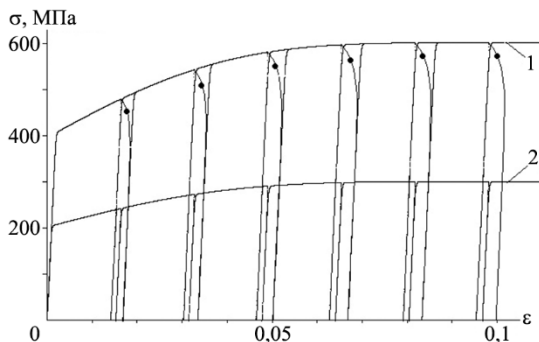


Рисунок 5 – Диаграммы растяжения с разгрузками

Аналогично кривым 3 и 4 на рисунке 3 переход с кривой 2 после разгрузки на другую скорость деформирования (например, \pm порядок) вызывает соответствующее изменение уровня напряжений, что полностью отвечает результатам испытаний титанового сплава ВТ1-1, для которого последствие незначительно [10, с. 270].

Если достигнутая деформация оказывается зафиксированной на некотором уровне $\epsilon_0(t_0)$, то изменение напряжений в рассматриваемом материале подчиняется уравнению

$$\dot{\sigma} = -E \frac{\sigma}{\eta_0 \exp(\sigma, \epsilon_0)} \quad (5)$$

и представляет собой их релаксацию до нулевого уровня. Решение уравнения (5) можно выразить через интегральную показательную функцию $Ei(x)$:

$$E/\eta_0 \cdot (t - t_0) = Ei([\alpha + \beta \cdot f(\epsilon_0)]\sigma_0) - Ei([\alpha + \beta \cdot f(\epsilon_0)]\sigma), \quad \sigma_0 = \sigma(\epsilon_0), \quad \alpha, \beta < 0.$$

На рисунке 6 приведены результаты непосредственного интегрирования уравнения (5) при значениях $\epsilon_0 = 0,0015$ и $\epsilon_0 = 0,0179$ на базовой кривой, соответствующих напряжениям $\sigma_0 = 0,75\sigma_{T1} = 300$ МПа и $\sigma_0 = (\sigma_{T1} + \sigma_{b1})/2 = 500$ МПа, за время $t_k = 10000$ с. Видна высокая скорость падения напряжений на

начальном этапе: переход через уровень 200 МПа происходит при используемых числовых параметрах материала за время $t \approx 1,38$ и $t \approx 7,50$ с.

Кривые ползучести $\dot{\varepsilon} = \sigma / \eta$ при деформациях $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{в1}$ показаны на рисунке 7 для напряжений, взятых, как и выше, для случая релаксации. Длительность процессов, с, различна: $t_k = 627$ и $t_k = 1,12$. В случае выпуклого характера базовой кривой, что имеет место для уравнения (3) при четном m , отображаются первый и второй участки кривых ползучести. Третий участок (с увеличивающейся скоростью нарастания деформаций) в этом случае реализуется при учете сопутствующей поврежденности материала либо после выхода за значение $\varepsilon = \varepsilon_{в1}$.

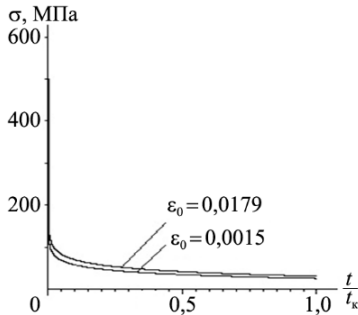


Рисунок 6 – Релаксация напряжений

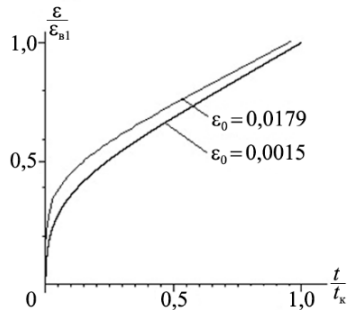


Рисунок 7 – Кривые ползучести

Так как по (2) линейный участок $\sigma = E\varepsilon$ на ДР отсутствует, то при циклическом нагружении всегда наблюдается рассеяние энергии, выражаемое площадью реализующейся петли гистерезиса $A_{гист}$. На рисунке 8 показаны циклические диаграммы деформирования материала при изменении деформации по синусоидальному закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \sin(pt)$ в течение нескольких циклов нагружения для исходных данных, соответствующих кривой 1 при частоте $p = 100 \text{ с}^{-1}$. Значения ε_0 в подрисуночной подписи заданы с равными интервалами.

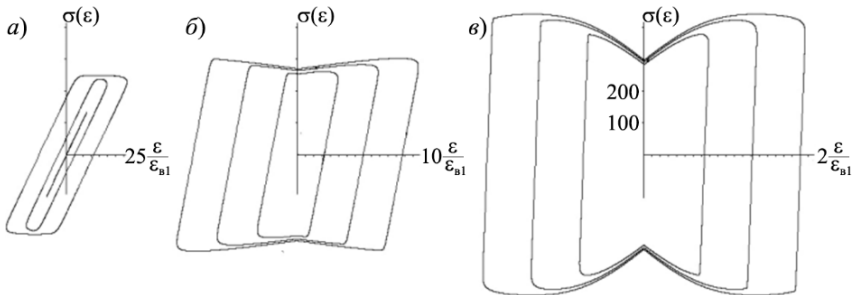


Рисунок 8 – Формы петель гистерезиса:

а – при $\varepsilon_0 = (1 \dots 3) \cdot 10^{-3}$; б – при $\varepsilon_0 = (5 \dots 15) \cdot 10^{-3}$; в – при $\varepsilon_0 = (5 \dots 10) \cdot 10^{-2}$

Из рисунка 8 видно, что геометрия петли существенно зависит от размаха деформаций ε_0 и формы участка упрочнения на ДР, но является геометрически стабильной и не изменяет свою конфигурацию от цикла к циклу.

В настоящей работе площадь петли A_{gist} вычислялась по правилу трапеций и ее величина относительно удельной работы деформирования материала вдоль склерономной базовой кривой $A_0 = \int_0^{\varepsilon_B} \sigma d\varepsilon = 5,64 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ приведена на рисунке 9 для $p_k = 600 \text{ с}^{-1}$. Расчеты показывают, что с ростом частоты и соответствующим этому увеличением скорости деформирования возрастают реализующиеся максимумы напряжений, а ширина петли сужается, что, в частности, приводит к изменению знака кривизны зависимости $A_{\text{gist}}(p)$ вблизи границы упругой зоны (см. рисунок 9, б). Это соответствует приведенным в [3] результатам для материалов с постоянной вязкостью, которые получены для случаев циклического нагружения с петлями гистерезиса различной формы. Для более точного учета рассеяния энергии при небольших уровнях деформаций $\varepsilon < \varepsilon_T$ целесообразно использовать некоторую подобранную нелинейную зависимость $\sigma(\varepsilon)$ на упругом участке базовой кривой, имея при этом в виду также обстоятельства, связанные с исключением в уравнении Максвелла возвратной компоненты деформаций.

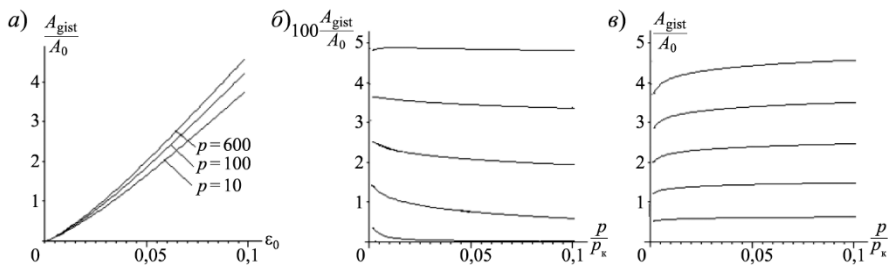


Рисунок 9 – Зависимости рассеяния энергии от деформации (а) и частоты (б, в) для случаев: б – при $\varepsilon_0 = (1,5 \dots 3,5) \cdot 10^{-3}$; в – при $\varepsilon_0 = (2 \dots 10) \cdot 10^{-2}$

Для полигармонического возбуждения типа

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot [\sin(pt) + k \cdot \sin(npt)],$$

где k и n – числовые коэффициенты, картина петель существенно усложняется, в особенности для случаев с n , не равным целому числу, при соответствующем увеличении диссипации энергии и сохранении структуры зависимостей $\sigma(\varepsilon)$ на больших периодах времени. Кривые $\sigma(\varepsilon)$ при $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-3}$, $p = 10 \text{ с}^{-1}$, $n = 3$, $k = \pm 1$ показаны на рисунке 10, где для наглядности приведены также и зависимости $\varepsilon(t)$ для использованных числовых параметров воздействия.

Из рисунков 8–10 видно, что проявление циклической нестабильности реальных материалов [19] полностью связано с наличием возвратных деформаций (возможный разогрев материала при циклических нагрузках здесь не учитываем).

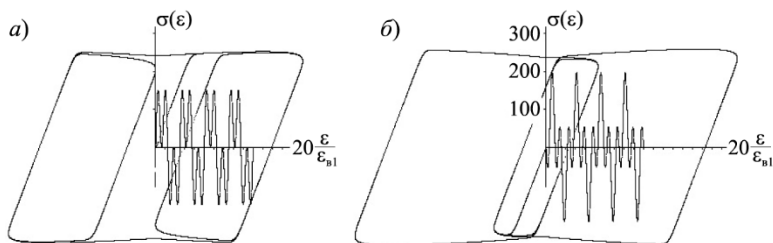


Рисунок 10 – Зависимость $\sigma(\epsilon)$ при полигармоническом возбуждении:
 а – для $k=1$; б – для $k=-1$

Заключение. Как видно из рассмотренных основных режимов одноосного нагружения, уравнения с нелинейной вязкостью адекватно отражают основные особенности деформирования упруго-пластических материалов и их достаточно просто применять к описанию воздействий различного вида. Использование базовых диаграмм, построенных для различных температур, позволяет установить зависимости параметров вязкости от их уровня и выполнять решение соответствующих температурных задач.

В настоящей работе не рассматривалось поведение материала общего типа (модель Кельвина) с нелинейной вязкостью, поскольку учет наличия возвратных деформаций привел бы к заметной вариативности результатов и усложнил бы их восприятие в связи с невозможностью получения и анализа аналитических решений. Естественно, однако, считать, что и для тела Кельвина учет протекающих при деформировании структурных превращений материала позволяет повысить точность отражения поведения реальных объектов.

Большим достоинством описания деформирования среды с помощью релогических уравнений рассматриваемого типа является упрощение программирования задач в связи с отсутствием необходимости в предвидении точек возможной разгрузки материала, что осложняет построение решений при склерономном подходе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Strain-rate-dependent model for the elastoplastic dynamic contact of sphere and plate / T. Jin, X. Yin, L. Zhang [et al.] // Materials Research Express. – 2020. – Vol. 7, is. 6. – Article 066523. – 13 p.
- 2 Experimental analysis of dynamic behavior of elastic visco-plastic beam under repeated mass impacts / Y. Guo, X. Yin, B. Yu [et al.] // International Journal of Impact Engineering. – 2023. – Vol. 171. – Article 104371.
- 3 Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1968. – 416 с.
- 4 Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров / А. Л. Рабинович. – М. : Наука, 1970. – 482 с.
- 5 Каргин, В. А. Краткие очерки по физико-химии полимеров / В. А. Каргин, Г. Л. Слонимский. – М. : Химия, 1967. – 231 с.
- 6 Лихачев, В. А. Структурно-аналитическая теория прочности / В. А. Лихачев, В. Г. Малинин. – СПб. : Наука, 1993. – 470 с.

- 7 Панин, В. Е. Структурные уровни деформации твердых тел / В. Е. Панин, В. А. Лихачев, Ю. В. Гриняев. – Новосибирск : Наука, 1990. – 225 с.
- 8 Структурные уровни пластической деформации и разрушения / В. Е. Панин, Ю. В. Гриняев, В. И. Данилов [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1990. – 225 с.
- 9 Рыбин, В. В. Большие пластические деформации и разрушение материала / В. В. Рыбин. – М. : Металлургия, 1986. – 224 с.
- 10 Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
- 11 Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел. В 2 т. Т. 2. / А. Надаи. – М. : Мир, 1969. – 863 с.
- 12 Регель, В. Р. Кинетическая природа прочности твердых тел / В. Р. Регель, А. И. Шуцкер, Э. Е. Томашевский. – М. : Наука, 1974. – 560 с.
- 13 Френкель, Я. И. Кинетическая теория жидкостей / Я. И. Френкель. – Л. : Наука, 1975. – 592 с.
- 14 Холодарь, Б. Г. Описание поведения реономного упруго-пластического материала при скоростном и ударном нагружении. / Б. Г. Холодарь // Перспективные технологии. – Витебск : ВГТУ, 2011. – Гл. 24. – С. 567–595.
- 15 Холодарь, Б. Г. Долговечность материала при сложном напряженном состоянии / Б. Г. Холодарь // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – № 3. – С. 8–13.
- 16 Гуревич, Г. И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн / Г. И. Гуревич. – М. : Наука, 1974. – 483 с.
- 17 Потапова, Л. Б. / Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения / Л. Б. Потапова, В. П. Ярцев. – М. : Машиностроение–1, 2005. – 244 с.
- 18 Дьяконов, В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ / В. П. Дьяконов. – М. : Наука, 1987. – 240 с.
- 19 Шнейдерович, Р. М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях / Р. М. Шнейдерович. – М. : Машиностроение, 1968. – 343 с.

B. G. KHOLODAR

Brest State Technical University, Brest, Belarus

DESCRIPTION OF ELASTIC-PLASTIC MATERIALS BEHAVIOR BY THE MAXWELL'S EQUATIONS WITH NONLINEAR VISCOSITY

The structural models consisting of elastic and viscous elements are considered and reflect the experimentally known material behavior effects, taking into account elastic, residual, and retarded strain components. It is shown that to consider the structural transformation features of materials, it is advisable to use a model with nonlinear viscosity, that reflects the change in the activation energy of structural transformation processes under the external loads. The main modes of isothermal uniaxial loading of an elastic-plastic material (constant-rate deformation, unloading, cyclic deformation, creep and stress relaxation) are considered. The viscosity of the material is determined by a stress-strain diagram. The relationship between stresses and strains is given by the first-order Maxwell differential equation. The numerical calculations results of material deformation under dynamic loading are presented.

Keywords: rheonomic materials, structural mechanical models, Maxwell solid, structural transformation, nonlinear viscosity, loading modes.

Получено 31.10.2025

УДК 621.643:539.41

Д. А. ЧЕРНОУС^{1,2}, С. В. ШИЛЬКО², Е. В. БЕССЧЕТНОВ³

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

²Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого
НАН Беларуси, Гомель, Беларусь

³ООО «Изоком», г. Дятлово, Беларусь

МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОЧНОСТНОГО РАСЧЕТА КОМПОЗИТНОЙ ТРУБЫ ДЛЯ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Разработана механико-математическая модель двухслойной трубы со слоями из перекрестно-армированного ортотропного полимерного композита. На основе модели предложен аналитический метод определения максимально допустимого внутреннего давления, при котором происходит разрушение трубы. Получены расчетные зависимости разрушающего давления от угла армирования и толщины композитного слоя, позволяющие оптимизировать конструкцию напорных труб для холодного и горячего водоснабжения.

Ключевые слова: двухслойная труба, направленно-армированный полимерный композит, гидростатическое давление, осесимметричная задача теории упругости, ортотропия, интенсивность тензора напряжений.

Введение. Для обеспечения безопасной эксплуатации систем холодного и горячего водоснабжения необходима расчетная оценка прочности и долговечности напорных труб, используемых в этих системах [1]. Известен ряд публикаций [2, 3], в которых достаточно полно описывается напряженно-деформированное состояние труб, изготовленных из однородного изотропного металлического или полимерного материала, в различных эксплуатационных условиях. Достаточно точное прогнозирование долговременной прочности таких труб пока осуществляется экспериментальным путем на основе экстраполяции результатов ускоренных гидравлических испытаний [4–6]. Методы расчета получивших широкое распространение в водоснабжении композитных труб [7] из направленно-армированных материалов с выраженной анизотропией механических свойств разработаны в гораздо меньшей степени. В работах [8, 9] описывается напряженное состояние композитной трубы при заданном давлении на внутренней и внешней поверхности. Однако остается нерешенным вопрос о практической применимости указанных результатов в прикладных расчетах.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является разработка метода расчетного определения критического, соответствующему началу разрушения, внутреннего давления для двухслойной трубы, содержащей направленно-армированные анизотропные слои.

Методика расчета. В качестве упрощенной структурной модели двухслойной трубы будем рассматривать составную цилиндрическую оболочку,

образованную внутренним «а» и внешним «b» слоями (рисунок 1). Слой «а» имеет внешний радиус $R_1 = R - h_b$ и толщину h_a , а слой «b» – внешний радиус R и толщину h_b . Внутренний радиус трубы $R_0 = R - h_a - h_b$. Слои трубы жестко соединены и образованы линейно упругими орторопными материалами.

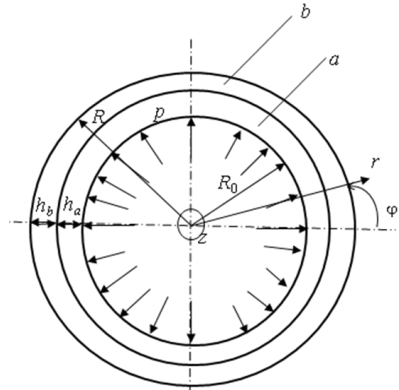


Рисунок 1 – Механическая модель двухслойной трубы

Описание напряженно-деформированного состояния осуществляется в цилиндрической системе координат z, r, φ , в которой ось z направлена по оси симметрии оболочки. Координатные оси z, r, φ соответствуют осям симметрии упругих свойств материалов слоев. Длина образующей принимается условно бесконечной. При этом оба слоя находятся в состоянии плоской деформации ($u_z = 0$). На внутреннюю поверхность слоя «а» действует равномерно распределенное давление p , а наружная поверхность слоя «b» свободна от внешних напряжений. Температурный фактор, оказывающий определенное влияние на напряженно-деформированное состояние трубы, в настоящем исследовании не учитывается.

Общее решение рассматриваемой осесимметричной задачи теории упругости в перемещениях имеет вид [2]

$$u_r^i = A^i r + \frac{B^i}{r}; \quad u_z^i = u_\varphi^i = 0. \quad (1)$$

Верхний индекс параметра $i = a, b$ соответствует слою, для которого вычисляется этот параметр. Константы A и B в решении (1) определяются из граничных условий.

В соответствии с (1) ненулевые осевые компоненты шестизначного вектора напряжений в слоях трубы задаются функциями

$$\begin{aligned} \sigma_r^i &= C_{rr}^i \left(A^i - \frac{B^i}{r^2} \right) + C_{r\varphi}^i \left(A^i + \frac{B^i}{r^2} \right); & \sigma_\varphi^i &= C_{\varphi\varphi}^i \left(A^i + \frac{B^i}{r^2} \right) + C_{r\varphi}^i \left(A^i - \frac{B^i}{r^2} \right); \\ \sigma_z^i &= C_{rz}^i \left(A^i - \frac{B^i}{r^2} \right) + C_{\varphi z}^i \left(A^i + \frac{B^i}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $C_{rr}^i, C_{\varphi\varphi}^i, C_{zz}^i, C_{r\varphi}^i, C_{\varphi z}^i, C_{rz}^i$ – компоненты матрицы модулей упругости соответствующего материала.

Для нахождения констант A и B используем следующие условия.

1 На внутреннюю поверхность слоя «а» действует равномерно распределенное (гидростатическое) давление p :

$$A^a \left(C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a \right) - \frac{B^a}{R_0^2} \left(C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a \right) = -p. \quad (3)$$

2 На внешней поверхности слоя «b» давление отсутствует:

$$A^b \left(C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b \right) - \frac{B^b}{R^2} \left(C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b \right) = 0. \quad (4)$$

3 На границе раздела слоев ($r = R_1$) выполняется условие неразрывности радиальной компоненты упругого перемещения:

$$A^a R_1 + \frac{B^a}{R_1} = A^b R_1 + \frac{B^b}{R_1}. \quad (5)$$

4 На границе раздела также выполняется условие неразрывности радиальной компоненты вектора напряжений:

$$A^a \left(C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a \right) - \frac{B^a}{R_1^2} \left(C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a \right) = A^b \left(C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b \right) - \frac{B^b}{R_1^2} \left(C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b \right). \quad (6)$$

Соотношения (3)–(6) составляют систему четырех линейных уравнений для определения констант A^a , A^b , B^a , B^b . Решение данной системы получено аналитически, и оно имеет вид

$$\begin{aligned} A^a &= p \frac{R_0^2}{R_1^2} \frac{R_1^2 Z^b - (R^2 - R_1^2)(C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b)(C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a)^{-1}}{(R_1^2 - R_0^2)Z^b (C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a) + (R^2 - R_1^2)Z^a (C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b)}; \\ A^b &= A^a \frac{Z^a}{Z^b} + \frac{pR_0^2}{R_1^2 Z^b (C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a)}; \quad B^b = A^b R^2 \frac{C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b}{C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b}; \\ B^a &= \frac{R_0^2}{C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a} \left[p + A^a (C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$Z^a = 1 + \frac{R_0^2}{R_1^2} \frac{C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a}{C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a}, \quad Z^b = 1 + \frac{R^2}{R_1^2} \frac{C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b}{C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b}. \quad (8)$$

Зная константы A^a , A^b , B^a и B^b , по формулам (2) определим зависимости компонент вектора напряжения от радиальной координаты r .

Для упрощения дальнейших выкладок примем, что рассматриваемая труба имеет один композитный анизотропный и один однородный изотропный слой, а ее разрушение начинается с разрушения внутреннего слоя. Анализ разрушения композитного анизотропного слоя является предметом дополнительного исследования.

В соответствии с критерием Мизеса [3], прочность однородного материала определяется максимальным значением интенсивности тензора напряжений σ_u^{\max} .

При рассматриваемом способе нагружения двухслойной трубы интенсивность σ_u в каждом слое является известной функцией радиальной координаты r :

$$\sigma_u^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r^i - \sigma_\varphi^i)^2 + (\sigma_r^i - \sigma_z^i)^2 + (\sigma_z^i - \sigma_\varphi^i)^2}. \quad (9)$$

Здесь осевые компоненты вектора напряжений определяются соотношениями (2) с учетом (7), (8).

Если материал i -го слоя однородный и изотропный, для компонент матрицы модулей упругости материала этого слоя можно записать

$$C_{rr}^i = C_{\varphi\varphi}^i = C_{zz}^i = \frac{E^i(1-\nu^i)}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)}; \quad C_{r\varphi}^i = C_{\varphi z}^i = C_{rz}^i = \frac{E^i\nu^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)}. \quad (10)$$

Здесь E^i , ν^i – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала i -го слоя соответственно.

При изотропии материала слоя выражение (9) для интенсивности тензора напряжений примет вид

$$\sigma_u^i = \frac{E^i}{(1+\nu^i)} \left(A^i + \frac{B^i}{r^2} \right). \quad (11)$$

Для определения максимального значения интенсивности тензора напряжений в соотношение (9) или (11) следует подставлять $r = R_0$ для слоя «а» и $r = R_1$ для слоя «б».

При анализе прочности коротких фрагментов трубы, применяемых при гидравлическом испытании [4–6] (рисунок 1), справедливо допущение о плоском напряженном состоянии трубы, в выражениях (2) имеем $\sigma_{zz} = 0$, а компоненты тензора модулей упругости можно вычислить по формулам

$$C_{rr(\sigma)}^i = C_{rr}^i - \frac{C_{rz}^i{}^2}{C_{zz}^i}; \quad C_{\varphi\varphi(\sigma)}^i = C_{\varphi\varphi}^i - \frac{C_{\varphi z}^i{}^2}{C_{zz}^i}; \quad C_{r\varphi(\sigma)}^i = C_{r\varphi}^i - \frac{C_{rz}^i C_{\varphi z}^i}{C_{zz}^i}. \quad (12)$$

Здесь нижний индекс (σ) означает, что соответствующая величина определена для плоского напряженного состояния.

Описанный метод позволяет рассчитать критическое значение внутреннего давления p_{cr} , при котором начнется разрушение трубы. Для этого внутреннее давление первоначально принимается равным единице $p = 1$. Определяются соответствующие этому давлению значения параметра $\sigma_u^{\max i(1)}$. Критическое внутреннее давление равно наименьшему отношению предела прочности σ_T^i материала соответствующего слоя к максимуму интенсивности тензора напряжений при единичном внутреннем давлении:

$$p_{cr} = \min \left\{ \frac{\sigma_T^a}{\sigma_{u(1)}^{\max a}}, \frac{\sigma_T^b}{\sigma_{u(1)}^{\max b}} \right\}. \quad (13)$$

Расчет эквивалентных модулей упругости материала, перекрестно-армированного волокнами, подробно изложен в работе [12] и здесь не приводится. Компоненты матрицы модулей упругости внутреннего слоя трубы C_{rr}^a (C_{zz}), $C_{\varphi\varphi}^a$ (C_{yy}), C_{zz}^a (C_{xx}), $C_{r\varphi}^a$ (C_{yz}), C_{rz}^a (C_{xz}), $C_{\varphi z}^a$ (C_{xy}) при фиксированном объемном содержании волокна $c_f = 0,1$ являются известными функциями угла α .

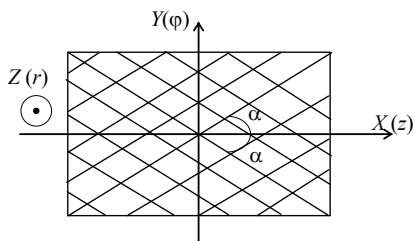


Рисунок 2 – Схема армирования композитного слоя трубы

Расчетный пример. Для апробации разработанного метода выполним расчет трубы, состоящей из внутреннего слоя, образованного перекрестно-армированным композитным материалом (рисунок 2) и внешнего слоя из однородного изотропного полимерного материала. Структура композита характеризуется углом α между направлениями армирования и осью X , соответствующей показанной на рисунке 1

оси z цилиндрической системы координат. Рассматривая в качестве примера композит в виде стеклопластика на эпоксидной матрице, зададим для матричного материала модуль Юнга $E_m = 1$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,35$ [10], а модуль Юнга E_f и коэффициент Пуассона ν_f материала армирующих волокон (S -стекла) примут значения 70 ГПа и 0,25 соответственно [11].

В качестве материала внешнего слоя трубы был рассмотрен традиционно используемый в трубах горячего водоснабжения [4] хлорированный поливинилхлорид ХПВХ (PVC-C), имеющий следующие значения механических характеристик [10] $E^b = 2$ ГПа; $\nu^b = 0,4$; $\sigma_r^b = 40$ МПа.

На рисунке 3, а представлены расчетные зависимости критического (разрушающего) давления p_{cr} от толщины композитного слоя при $R = 30$ мм; толщине полимерного слоя $h_b = 3$ мм и угла армирования в композитном слое 45° .

Как и следовало ожидать, увеличение толщины h_a приводит к возрастанию критического внутреннего давления. Зависимость $p_{cr}(h_a)$ близка к линейной. Скорость изменения критического внутреннего давления по мере увеличения h_a при плоском напряженном состоянии несколько выше, чем при плоской деформации.

Повышение прочности трубы (увеличение p_{cr}) достигается не только увеличением толщины композитного слоя, но и выбором оптимального угла армирования α в этом слое (рисунок 3, б). Для состояния плоской деформации трубы увеличение угла α приводит к незначительному монотонному возрастанию критического значения внутреннего давления. В рассмотренном расчетном примере ($R = 30$ мм; $h_a = h_b = 3$ мм) при изменении угла α от 0 до 90° значение p_{cr} увеличилось на 6,7%. При плоском напряженном состоянии трубы зависимость $p_{cr}(\alpha)$ характеризуется наличием максимума в окрестности значения угла армирования $\alpha \approx 45^\circ$.

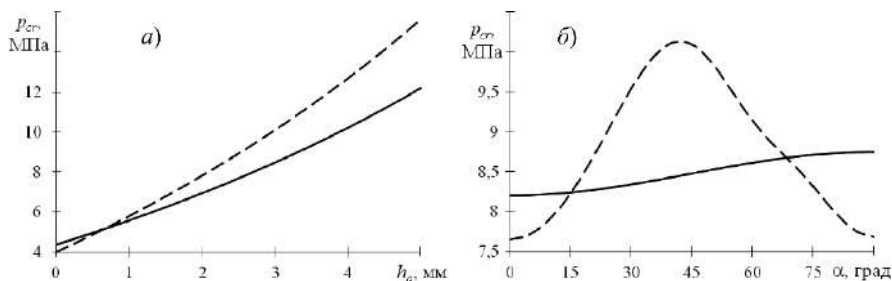


Рисунок 3 – Зависимости критического значения внутреннего давления от толщины композитного слоя (а) и угла армирования (б). Сплошная кривая – состояние плоской деформации; пунктирная – плоское напряженное состояние

Закключение. В результате использования разработанной механико-математической модели и метода прочностного расчета двуслойной трубы с внутренним направленно-армированным и наружным однородным изотропным слоем установлено следующее:

- критическое значение внутреннего давления, соответствующее началу разрушения рассматриваемой трубы, практически линейно возрастает с увеличением толщины композитного слоя;
- если длина рассматриваемого участка трубы много больше ее радиуса (состояние плоской деформации), оптимальной по критерию допускаемого внутреннего давления является окружная («намоточная») ориентация волокон ($\alpha = 90^\circ$) армированного слоя;
- если длина участка трубы сопоставима или меньше диаметра (плоское напряженное состояние), максимальная прочность по критерию допускаемого внутреннего давления достигается при угле 45° между направлением армирования и осью симметрии трубы;
- данные расчетные оценки подтверждаются опытом проектирования и эксплуатации композитных водоводов, работающих в условиях плоской деформации, и реальной структурой армирования резинокордных композитов для пневматических автомобильных шин [13];
- практический интерес представляет также анализ прочности иных вариантов композитных напорных труб, что является предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 A review on carbon fiber reinforced polymer as wrapping structures for pipeline / S. M. Letchumanan, A. M. T. Arifin, A. E. Ismail, I. Taib // International Journal of Integrated Engineering. – 2023. – Vol. 15, is. 1. – P. 45–57.
- 2 Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 941 с.
- 3 Саруев, А. Л. Исследования напряженно-деформированного состояния трубопроводов / А. Л. Саруев, А. В. Рудаченко. – Томск : Изд-во ТПУ, 2021. – 146 с.

4 ГОСТ 32415–2013. Трубы напорные из термопластов и соединительные детали к ним для систем водоснабжения и отопления. Общие технические условия. – Введ. 01.01.2015. – М. : Стандартинформ, 2014. – 79 с.

5 ГОСТ ISO 9080–2023. Трубопроводы и воздухопроводы из пластмасс. Определение длительной гидростатической прочности термопластов на образцах в форме труб методом экстраполяции. – Введ. 01.12.2024. – М. : ФГБУ «РСТ», 2024. – 30 с.

6 ГОСТ ISO 1167-1–2013. Трубы, соединительные детали и узлы соединений из термопластов для транспортирования жидких и газообразных сред. Определение стойкости к внутреннему давлению. Ч. 1. Общий метод. – Введ. 01.08.2014. – М. : Стандартинформ, 2014. – 8 с.

7 **Отставнов, А. А.** О стандартизированных трубных изделиях из реактопластов, армированных стекловолокном / А. А. Отставнов, В. А. Харькин // Сантехника. – 2014. – № 2. – С. 48–52.

8 **Можаровский, В. В.** Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб их ортотропных материалов / В. В. Можаровский, С. В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 44–51.

9 **Бочкарева, С. А.** Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных полимерных труб методом конечных элементов / С. А. Бочкарева, Ю. А. Реутов // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – № 2. – С. 81–84.

10 **Сутягин, В. М.** Основные свойства полимеров / В. М. Сутягин, О. С. Кукурина, В. Г. Бондалетов. – Томск : Изд-во ТПУ, 2010. – 96 с.

11 **Бородулин, А. С.** Свойства и особенности структур стеклянных волокон, используемых при изготовлении стеклопластиков / А. С. Бородулин // Материаловедение. – 2012. – № 7. – С. 34–37.

12 Тканые конструкционные композиты / Ф. Скардино, Дж. Хирл, С. Кавабата [и др.] ; под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. – М. : Мир, 1991. – 430 с.

13 **Хотько, А. В.** Применение теории сетчатых оболочек при проектировании автомобильных шин / А. В. Хотько, С. В. Шилько // Механика машин, механизмов и материалов. – 2020. – № 1. – С. 5–11.

D. A. CHERNOUS^{1,2}, S. V. SHILKO², E. V. BESSCHETNOV³

¹*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

²*V. A. Bely Metal Polymer Research Institute, Gomel, Belarus*

³*LLC "Izokom", Dyatlovo, Belarus*

METHOD AND RESULTS OF STRENGTH ANALYSIS OF WATER-SUPPLY COMPOSITE PIPE

A mechanical and mathematical model of a two-layer pipe with layers of cross-reinforced orthotropic polymer composite is developed. Based on this model, an analytical method for determining the maximum allowable internal pressure for the case of the pipe fail is proposed. The calculated dependences of the failure pressure on the reinforcement angle and composite layer thickness are obtained and allow to optimize the design of pressure pipes for cold and hot water supply.

Keywords: two-layer pipe, directionally reinforced polymer composite, hydrostatic pressure, axisymmetric elasticity problem, orthotropy, stress tensor intensity.

Получено 16.10.2025

УДК 629.4.02:004.94

А. О. ШИМАНОВСКИЙ, Ю. Д. КАРАЦЮБА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗИНОКОРДНОЙ МУФТЫ ЛОКОМОТИВА

Разработана объемная конечно-элементная модель резинокордной муфты в среде программного комплекса ANSYS Workbench. Выполнены расчеты ее напряженно-деформированного состояния под действием крутящего момента, приложенного к месту контакта с одним из металлических фланцев. Показано, что полученные области с высокими напряжениями с высокой степенью точности соответствуют местам наблюдаемых на практике повреждений, что подтверждает достоверность результатов, получаемых на основе применения разработанной модели.

Ключевые слова: резинокордная муфта, напряжения, деформации, конечно-элементное моделирование.

Резинокордная муфта (РКМ) используется для передачи крутящего момента на электропоездах серий ЭР, ЭД, ЭП, а также на некоторых локомотивах с гидравлической передачей. Благодаря своей упругости такая муфта снижает ударные нагрузки, возникающие при переходных режимах движения подвижного состава. Она также компенсирует несоосность соединяемых валов, допускает некоторый излом и перекося осей их валов за счет гибкости резинокордного элемента [1].

В процессе эксплуатации РКМ испытывают значительные импульсные, знакопеременные, высокочастотные периодические и непериодические нагрузки, которые ведут к появлению дефектов в резинокордных оболочках. Их появление связано с изменением жесткости конструкции, обусловленным старением материала, достижением температурой диссипативного разогрева критического уровня, возникновением усталостных трещин и достижением ими критических размеров, что в конечном счете ведет к потере несущей способности конструкции [2].

Анализ статистической информации об эксплуатации 177 секций тягового подвижного состава в локомотивных (моторвагонных) депо показал, что в течение 2024 года обнаружены следующие отказы:

- 39 случаев разрушения болтов крепления РКМ;
- 26 случаев разрушения резинокордного слоя.

Следует отметить, что в подавляющем большинстве случаев повреждения резинокордного слоя происходят со стороны фланца тягового электродвигателя, а болтов крепления – фланца тягового редуктора. Аналогичная ситуация наблюдалась при эксплуатации РКМ и на Латвийской железной дороге [3].

Аналізу динаміки приводів, включаючих РКМ, присвячено значительное количество публикаций. При этом в математических моделях используется

обобщенный коэффициент жесткости при кручении, который находится по результатам экспериментов [4–8]. Например, в работе [9] определены собственные частоты колебаний системы, включающей РКМ.

Значительный объем экспериментальных исследований, посвященных оценке ресурса резинокордных оболочек, используемых в железнодорожном подвижном составе, выполнен А. П. Евдокимовым [10–12]. В результате таких исследований разработаны рекомендации по сборке РКМ, позволяющие обеспечить надежность приводов в эксплуатации [13]. Установлены рациональные монтажные размеры, а также величины сжатия упругого элемента, которые позволяют обеспечить снижение динамической нагруженности.

Работ, в которых анализируется объемное напряженно-деформированное состояние расчетным способом, найти не удалось.

Проведенный анализ показал, что для выработки путей повышения долговечности конструкции РКМ требуется установление влияния различных факторов на напряжения в ее элементах. Чтобы учесть особенности деформирования резинокордного слоя, который имеет сложную геометрию, требуется применение компьютерного моделирования. Целью данной работы является разработка цифровых моделей, позволяющих осуществлять уточненное определение напряженно-деформированного состояния элементов РКМ при разных эксплуатационных режимах.

Эластичная муфта с торообразным резинокордным элементом представлена на рисунке 1. Она включает ведущий 1 и ведомый 5 фланцы, к которым крепится неразрезной резинокордный упругий элемент. Он, в свою очередь, состоит из каркаса 3, двух металлических колец 6, наружного 2 и внутреннего 4 защитных резиновых покрытий.

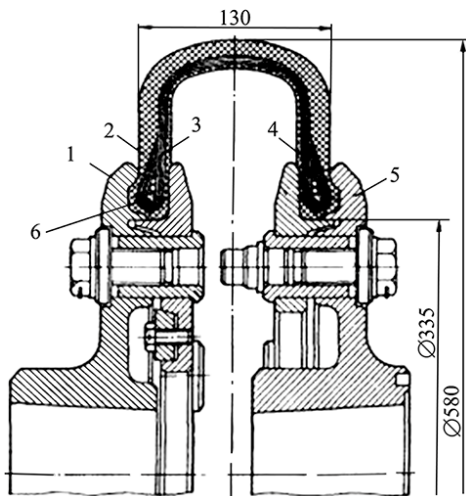


Рисунок 1 – Эластичная муфта с торообразным резинокордным элементом

Учитывая сложную геометрию резинокордного элемента, для определения его наиболее нагруженных участков возможно применение методов гомогенизации, а также иных приближенных моделей, используемых при расчетах автомобильных шин [14]. Например, корд может быть представлен в виде однородного кольца с заданными свойствами, с использованием моделей эффективного кордного волокна и эффективного резинокордного слоя и др.

Средствами программного комплекса ANSYS Workbench разработана геометрическая модель РКМ. При создании конечно-элементной модели использованы тетраэдральные элементы, механические характеристики материалов которых соответствовали армированной кордом резине и стали. Общее число элементов модели составило около 700 000. Выработана схема описания граничных условий, позволяющая с достаточной степенью точности учесть условия работы муфты [15]. К одному из фланцев был приложен закручивающий момент, а второй фланец жестко закреплен.

В результате расчетов определены напряжения и деформации в рассматриваемой муфте. На рисунке 2 приведена схема распределения эквивалентных по Мизесу напряжений, Па, из которой видно, что наибольшие напряжения возникают вблизи места крепления муфты к металлическому фланцу, то есть именно там, где на практике наблюдается разрыв резинокордного слоя [16]. Тем самым подтверждается достоверность результатов, получаемых с помощью разработанной модели.

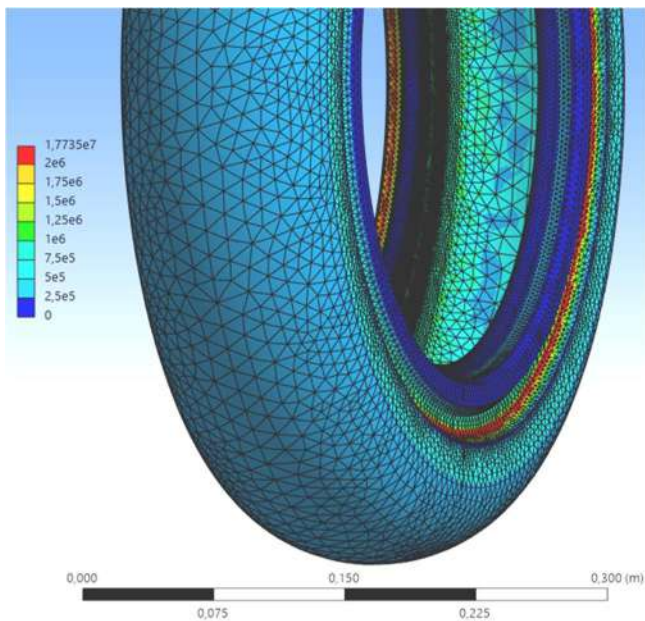


Рисунок 2 – Эквивалентные по Мизесу напряжения в РКМ

На рисунке 3 приведено распределение напряжений в поперечном сечении РКМ. Из нее видно, что значительные напряжения возникают в каркасе, а также вблизи мест присоединения резинокордного элемента к фланцам. Представленная на рисунке 4 схема распределения деформаций показывает, что наибольшие смещения наблюдаются в месте приложения крутящего момента, что полностью соответствует физике процесса.

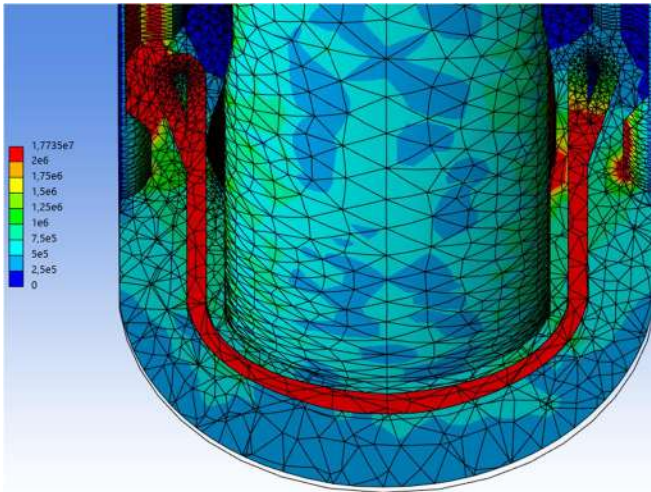


Рисунок 3 – Эквивалентные по Мизесу напряжения в поперечном сечении РКМ

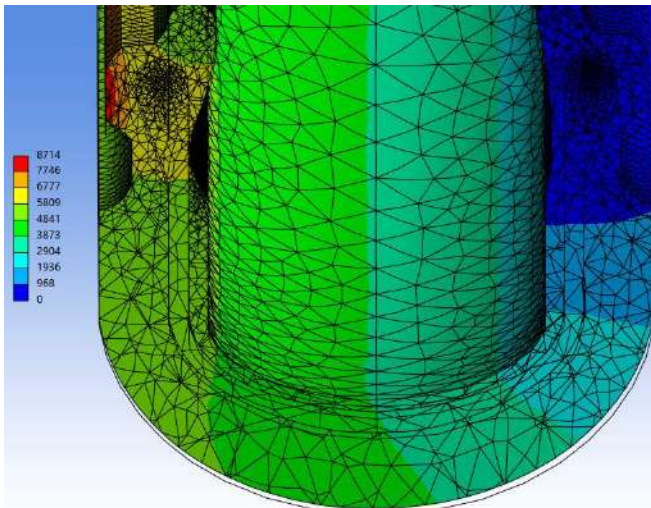


Рисунок 4 – Суммарная деформация РКМ, мкм

Таким образом, выполненные расчеты напряженно-деформированного состояния РКМ под действием крутящего момента, приложенного к месту контакта с одним из металлических фланцев показывают, что полученные области с высокими напряжениями с высокой степенью точности соответствуют местам наблюдаемых на практике повреждений, что подтверждает достоверность результатов, получаемых на основе применения разработанной модели. Ее использование для совершенствования конструкции наряду с повышением качества сборки позволит повысить надежность РКМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Электропоезд ЭР9Т: Руководство по эксплуатации. Книга 1 / Рижский вагоностроительный завод. – Рига, 1990. – 540 с.

2 **Евдокимов, А. П.** Экспериментальные исследования торовой резинокордной оболочки упругой муфты приводов тепловозов / Машиностроение и инженерное образование. – 2006. – № 2 (7). – С. 2–18.

3 Examining failures in rubber-cord couplings within ER2 series electric trains / P. Gavrilovs, D. Gorbacovs, J. Eiduks [et al.] // Transport. – 2024. – Vol. 34, is. 2. – P. 183–196.

4 Заполовський, М. Й. Моделювання тягового електропривода дизель-поїзда з урахуванням використання гумо-кордової муфти в процесі буксування колісних пар / М. Й. Заполовський, М. В. Мезенцев, М. В. Оліфір // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2025. – Т. 1, № 79. – С. 23–30.

5 **Капустин, М. Ю.** Методы комплексного анализа динамической системы тягового привода локомотива / М. Ю. Капустин, Д. Н. Шевченко, О. В. Измеров // Наука и техника транспорта. – 2019. – № 2. – С. 15–21.

6 Классификация динамических явлений в тяговом приводе локомотива / Д. Я. Антипин, Д. А. Бондаренко, О. В. Измеров, М. А. Маслов // Известия Транссиба. – 2016. – № 3 (27). – С. 17–23.

7 Применение объектной модели для конструирования тягового привода локомотива / А. С. Космодамианский, Д. Я. Антипин, М. А. Маслов, Д. Н. Шевченко // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2019. – № 10 (83). – С. 39–47.

8 Разработка опорно-осевого привода пассажирских электропоездов с асинхронными тяговыми двигателями / А. А. Пугачев, В. И. Воробьев, О. В. Измеров, Е. В. Николаев // Транспортное машиностроение. – 2023. – № 3 (15). – С. 45–58.

9 Methodology for evaluating the dynamic parameters of the rubber-cord shell of a high-speed rolling stock pneumatic spring in the wheel-frog interaction of a railroad switch / A. Kuzyshyn, V. Kovalchuk, Y. Royko [et al.] // Archives of Transport. – 2025. – Vol. 73, is. 1. – P. 35–52.

10 **Евдокимов, А. П.** Исследование температурных полей резинокордных оболочек силовых приводов подвижного состава / А. П. Евдокимов // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2022. – № 28. – С. 13–17.

11 **Evdokimov, A. P.** Stress-strain behavior and specific friction of toric rubber-cord casings of flexible couplings / A. P. Evdokimov, T. Sh. Shikhnabieva // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2017. – Vol. 46, is. 2. – P. 199–203.

12 **Евдокимов, А. П.** Исходный и остаточный ресурс резинокордных оболочек соединительных устройств подвижного железнодорожного состава / А. П. Евдокимов // *Globus: Технические науки.* – 2021. – Т. 7, № 2 (38). – С. 25–30.

13 **Евдокимов, А. П.** Технологические решения по снижению осевых нагрузок резинокордной оболочки соединительной муфты приводов / А. П. Евдокимов // *Сборка в машиностроении, приборостроении.* – 2024. – № 5. – С. 212–214.

14 **Можаровский, В. В.** О расчете напряженного состояния массивных шин на примере модели цилиндра из армированного материала с учетом элементов вязкоупругости / В. В. Можаровский // *Известия ГТУ им. Ф. Скорины.* – 2010. – № 5. – С. 109–114.

15 **Шимановский, А. О.** Влияние условий закрепления контура сэндвич-панелей на их напряженно-деформированное состояние / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // *Механика. Исследования и инновации.* – 2020. – Вып. 13. – С. 183–188.

16 **Шимановский, А. О.** Конечно-элементное моделирование работы резинокордной муфты локомотива под нагрузкой / А. О. Шимановский, Ю. Д. Карацуба // *Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. пятилетке качества (Гомель, 20–21 ноября 2025 г.) : в 2 ч. Ч. 1.* – Гомель : БелГУТ, 2025. – С. 132–133.

A. O. SHIMANOVSKY, Yu. D. KARATSUBA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FINITE ELEMENT MODELING OF A LOCOMOTIVE RUBBER-CORD COUPLING STRESS-STRAIN STATE

A 3D finite element model of a rubber-cord coupling is developed using the ANSYS Workbench software package. There are performed the calculations of the coupling stress-strain state under the action of a torque applied to the contact point with one of the metal flanges. It is shown that the resulting high-stress areas accurately correspond to the locations of damage observed in a practice, confirming the reliability of the results obtained using the developed model.

Keywords: rubber-cord coupling, stress, strain, finite element modeling.

Получено 10.10.2025

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODOICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 18. Гомель, 2025

УДК 531.31

Э. А. АСЛАНОВ, Г. Г. САФАРОВ

Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан

УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Приводится доказательство теоремы об условии эквивалентности двух систем связанных векторов. Она является исходной для доказательства соответствующих теорем о количестве движения, о моменте количества движения и о кинетической энергии системы.

Ключевые слова: механическая система, динамика, эквивалентность связанных векторов, вириал.

Допустим, что механическая система, состоящая из n материальных точек, под действием внешних и внутренних сил движется относительно инерциальной системы отсчета. Запишем для каждой материальной точки второй закон Ньютона:

$$m_i \bar{w}_i = \bar{E}_i + \bar{I}_i, \quad (1)$$

где m_i , \bar{w}_i – масса и ускорение i -й точки системы ($i = 1, 2, \dots, n$); \bar{E}_i и \bar{I}_i – равнодействующие внешних (External) и внутренних (Internal) сил, приложенных к этой материальной точке [1–3].

При движении материальной системы относительно инерциальной системы отсчета произведение масс на ускорения ее точек должны быть эквивалентны силам, которые являются причиной ускоренного движения этой системы. Другими словами, система векторных равенств (1) должна сопровождаться условиями эквивалентности двух названных систем векторов, то есть

$$m_i \bar{w}_i \sim (\bar{E}_i, \bar{I}_i).$$

Применим условия эквивалентности второго закона Ньютона [1] к системе векторов, связанных с каждой материальной точкой механической системы. Помимо уравнения (1) они включают записанные в скалярно-геометрической форме условия:

$$\bar{M}_o(m_i \bar{w}_i) = \bar{M}_o(\bar{E}_i) + \bar{M}_o(\bar{I}_i); \quad (2)$$

$$V_o(m_i \bar{w}_i) = V_o(\bar{E}_i) + V_o(\bar{I}_i), \quad (3)$$

где \bar{M}_o и V_o – момент и вириал вектора относительно центра O .

Эти условия эквивалентности описывают движение механической системы. Однако практически реализовать исследование движения системы удастся только для систем, состоящих из двух или трех материальных точек, которые известны как «задача двух тел» или «задача трех тел». Эти задачи лежат в основе небесной механики, а также используются при исследовании столкновения и рассеяния элементарных частиц. Сложность использования этих систем состоит, прежде всего, в том, что заранее не известно аналитическое выражение внутренних сил и реакций связей [4–7]. В теоретической механике разработаны методы, которые позволяют обойти эти трудности. Как известно, система скользящих векторов определяется главным вектором и главным моментом. Иначе обстоит дело в системе связанных векторов, которая определяется главным вектором, главным моментом и главным вириалом. Потому проанализируем три вида систем векторов: свободных, скользящих и связанных.

Главным вектором систем свободных, скользящих и связанных векторов называется сумма всех векторов, которые входят в систему:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i.$$

Система, состоящая из свободных векторов, полностью характеризуется одним вектором – главным вектором \bar{R} этой системы.

Главным моментом скользящих и связанных векторов относительно некоторого центра называется сумма вектор-моментов всех векторов относительно этого же центра:

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \bar{M}_o(\bar{a}_i).$$

Система скользящих векторов характеризуется уже двумя векторами: главным вектором \bar{R} и главным моментом \bar{M}_o относительно центра [8].

Главным вириалом связанных векторов относительно некоторого центра называется алгебраическая сумма вириалов всех векторов относительно того же центра:

$$V_o = \sum_{i=1}^n V_o(\bar{a}_i).$$

Система, состоящая из связанных векторов полностью характеризуется тремя параметрами: двумя векторами – главным вектором \bar{R} , главным вектор-моментом \bar{M}_O и еще одной скалярной величиной – главным вириалом V_O относительно того же центра [9, 10].

Далее рассмотрим эквивалентность систем связанных векторов $(m_i \bar{w}_i)_n$ и $(\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n$, каждая из которых задается своим главным вектором, главным моментом и главным вириалом, то есть

$$(\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n = \{\bar{R}(t), \bar{M}_O(t), V_O(t)\}; \quad (m_i \bar{w}_i)_n = \{\bar{R}^*(t), \bar{M}_O^*(t), V_O^*(t)\}.$$

Теорема. Две системы связанных векторов $(m_i \bar{w}_i)_n$ и $(\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда при приведении к произвольной точке каждой из этих систем их результирующие главные векторы, главные вектор-моменты а также главные вириалы равны, то есть

$$\text{если } \bar{R} = \bar{R}^*; \quad \bar{M}_O = \bar{M}_O^*; \quad V_O = V_O^*, \quad \text{тогда и } (\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n \sim (m_i \bar{w}_i)_n.$$

Доказательство. Докажем достаточность условий эквивалентности.

Первое условие. Потребуем, чтобы главные векторы систем были геометрически равны: $\bar{R} = \bar{R}^*$.

Для выполнения этого требования главные векторы этих систем должны иметь одинаковые направления и равные модули. Но поскольку точки приложения и линии действия этих главных векторов различны, их нельзя считать эквивалентными.

Второе условие. Потребуем, чтобы и главные вектор-моменты этих систем относительно выбранного центра были геометрически равны: $\bar{M}_O = \bar{M}_O^*$.

Чтобы выполнялось это требование, главные векторы сил \bar{R} и главные векторы \bar{R}^* , соответствующие ускорениям, расположатся на одной и той же прямой. Так как точки приложения этих векторов могут быть различными, их нельзя считать эквивалентными.

Третье условие. Потребуем, чтобы и главные вириалы этих систем векторов относительно выбранного центра были равны, то есть $V_O = V_O^*$.

Так как точки приложения рассматриваемых векторов определяются их вириалами, при выполнении последнего требования точки их приложения совпадают.

Теорема доказана.

Прежде отметим, что по третьему закону Ньютона внутренние силы обладают следующими двумя свойствами: геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) и геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства (главный момент внутренних сил) равны нулю, то есть

$$\sum_{i=1}^n \bar{I}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{I}_i) = 0.$$

Учитывая изложенные замечания, сложим соответственно левые и правые части равенств (1), (2), (3) и получим условия эквивалентности двух систем связанных векторов:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i; \quad \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{E}_i);$$

$$\sum_{i=1}^n V_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n V_O(\bar{E}_i) + \sum_{i=1}^n V_O(\bar{I}_i).$$

Основная роль условий эквивалентности состоит в том, что они или следствие из них являются исходными для получения соответствующих теорем о количестве движения, о моменте движения и о кинетической энергии системы. Они, в свою очередь, определяют характер движения механических систем.

Теорема об изменении количества движения материальной системы.

Движение механической системы всегда сопровождается изменением трех характеризующих его динамических величин: количества движения, кинетического момента и кинетической энергии. Теорема об изменении количества движения применяется, когда механическое движение передается от одной системы к другой.

Определение. Количеством движения называется мера механического движения, выражающаяся геометрической суммой произведений массы каждой частицы материальной системы на ее скорость:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i.$$

Теорема. Производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^E.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы пользуемся условием эквивалентности двух систем связанных векторов. По условию эквивалентности, главный вектор, характеризующий ускорения, геометрически равен главному вектору внешних сил:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i; \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i.$$

Отсюда
$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^E. \tag{4}$$

Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы.

Допустим, что механическая система, состоящая из n материальных точек движется относительно неподвижного центра под действием внешних и внутренних сил. Момент количества движения материальной точки относительно выбранного центра является динамической характеристикой механического движения, определяющей положение материальной точки относительно этого центра.

Определение. Кинетическим или главным моментом количества движения механической системы относительно данного центра называем вектор, равный геометрической сумме вектор-моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра:

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i).$$

Теорема. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E.$$

Доказательство. Из условия эквивалентности двух систем связанных векторов запишем равенство главных вектор-моментов этих систем с учетом того, что главный вектор-момент внутренних сил равен нулю:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{E}_i); \quad \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{E}_i);$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i) = \bar{M}_O^E;$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E. \quad (5)$$

Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек. Кинетическая энергия характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого вида движения, например, в теплоту, в потенциальную энергию, в электричество и пр.

Определение. Кинетическая энергия системы материальных точек есть динамическая величина, выражающаяся половиной суммы произведения массы каждой частицы системы на квадрат скорости:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Теорема. Производная от кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе материальных точек:

$$\frac{dT}{dt} = N^E + N^I,$$

где N^E, N^I – сумма мощностей всех внешних и внутренних сил.

Доказательство. Пользуемся условием эквивалентности двух связанных систем векторов. Запишем равенство главных вириалов:

$$\sum_{i=1}^n V_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n V_O(\bar{E}_i) + \sum_{i=1}^n V_O(\bar{I}_i).$$

Это равенство запишем в явном виде и с обеих частей возьмем производную по времени

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \bar{w}_i \cdot \bar{r}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{E}_i \cdot \bar{r}_i) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{I}_i \cdot \bar{r}_i).$$

С учетом равенства

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i - \sum_{i=1}^n \bar{E}_i - \sum_{i=1}^n \bar{I}_i \right) = 0$$

получим

$$\sum_{i=1}^n (m_i \bar{w}_i \cdot \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{E}_i \cdot \bar{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{I}_i \cdot \bar{v}_i).$$

Далее имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n N_i^E + \sum_{i=1}^n N_i^I.$$

$$\frac{dT}{dt} = N^E + N^I. \quad (6)$$

Теорема доказана.

Таким образом, в статье выведены общие теоремы динамики для систем свободных материальных точек на основе условия эквивалентности связанных векторов. Если рассматриваемая система является замкнутой, то дифференциальные уравнения (1), (2) и (3) приведут к первым интегралам, т. е. к законам сохранения:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \text{const}; \quad \sum_{i=1}^n (r_i \times m_i \bar{v}_i) = \text{const}; \quad \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U = \text{const}.$$

Следует отметить, что все законы сохранения, полученные из условия эквивалентности второго закона Ньютона, как в традиционных изложениях связаны со свойствами пространства и времени, которые постулируются в классической механике. Сохранение количества движения системы связано

с однородностью пространства, в силу которой механические свойства замкнутой системы в целом не меняются при любом параллельном переносе системы.

Сохранение момента количества движения связано с изотропностью пространства, в силу которой механические свойства замкнутой системы в целом не изменяются при любом повороте системы.

Сохранение вириала системы связано с однородностью времени, в силу которой механические свойства замкнутой системы не меняются при любом переносе системы во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Геронимус, Я. Л. Теоретическая механика : очерки об основных положениях / Я. Л. Геронимус. – М. : Наука, 1973. – 511 с.

2 Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков : учеб. пособие / И. И. Ольховский. – М. : Наука, 1970. – 447 с.

3 Бекташи, Т. Г. Основной курс теоретической механики / Т. Г. Бекташи. – Баку : Элм, 1999. – 689 с.

4 Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – М. : Наука, 1974. – 367 с.

5 Березкин, Е. Н. Лекции по теоретической механике / Е. Н. Березкин. – М. : МГУ, 1967. – 314 с.

6 Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики : в 2 т. / Н. А. Кильчевский. – М. : Наука, 1977. – Т. 1. – 480 с.

7 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : в 2 ч. / А. А. Яблонский. – М. : Высш. школа, 1977. – Ч. 2. – 429 с.

8 Меркин, Д. Р. Алгебра свободных и скользящих векторов / Д. Р. Меркин. – М. : Физматлит, 1962. – 162 с.

9 Сафаров, Г. Г. Геометрическая интерпретация основных теорем динамики / Г. Г. Сафаров // *Nəzəri və tətbiqi mexanika*. – 2008. – № 3. – С. 19.

10 Сафаров, Г. Г. Условия эквивалентности второго закона Ньютона / Г. Г. Сафаров // *Elmi əsərlər – fundamental elmlər*. – 2009. – Cild VIII (29), № 1. – S. 42–46.

E. A. ASLANOV, G. G. SAFAROV

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

EQUIVALENCE CONDITIONS AND BASIC THEOREMS OF A MATERIAL POINTS SYSTEM DYNAMICS

The proof of the theorem on the equivalence condition of two systems of coupled vectors is presented in the paper. It serves as the starting point for proving the corresponding theorems on the momentum, angular momentum, and kinetic energy of the system.

Keywords: mechanical system, dynamics, equivalence of coupled vectors, virial.

Получено 31.10.2025

УДК 539.31:534.113

А. С. ИВАНОВ, Д. П. РЕЙФШНЕЙДЕР, Е. В. ФАЛЬКОВА
 Сибирский государственный университет науки и технологий
 им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИЕЙ СЕЧЕНИЙ

На основе анализа напряжений при изгибе и растяжении, а также расчета собственных частот колебаний балки сравниваются характеристики сечений: круглых, кольцевых и квадратных. Установлено, что тонкостенные сечения (например, кольцевое) обеспечивают снижение массы конструкции без ухудшения прочности в отличие от сплошных сечений с высокой инертностью. Результаты работы могут быть применены для оптимизации инженерных решений в аэрокосмической отрасли.

Ключевые слова: ракетно-космическая техника, прочность, изгиб, растяжение, собственные частоты, композитные материалы, тонкостенное сечение.

В ракетно-космических конструкциях находят применение стержневые, оболочечные элементы и массивы. Они должны удовлетворять условию минимума массы при обеспечении необходимого уровня прочности. При обучении студентов для улучшения усвоения учебного материала целесообразно использование иллюстрационного материала, наглядно демонстрирующего преимущества и недостатки различных видов поперечных сечений.

Для сравнительного анализа были выбраны их конфигурации, нашедшие применение в современной ракетно-космической технике: круглое сплошное, кольцевое, квадратное, квадратное с сопряженными краями (рисунок 1).

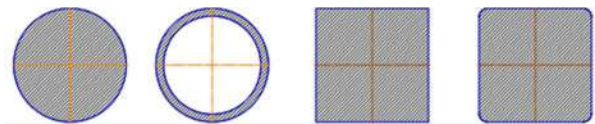


Рисунок 1 – Конфигурации сечений

Проверка прочности осуществлялась исходя из условий прочности при изгибе и растяжении. Изгиб формирует ударная сила, а растяжение – центробежная сила, возникающая за счет инертности сосредоточенных масс.

В сопротивлении материалов расчет изгибных и растягивающих напряжений осуществляется соответственно по формулам

$$\sigma_{и} = \frac{M}{W}; \quad \sigma_{р} = \frac{F}{A},$$

где M , F – изгибающий момент и продольная сила в поперечном сечении; W , A – осевой момент сопротивления и площадь поперечного сечения.

Соответственно максимальные суммарные напряжения

$$\sigma = \sigma_{и} + \sigma_{р} = \frac{M}{W} + \frac{F}{A} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Результаты расчетов однозначно показывают, что тонкостенное сечение, обладая значительно меньшей массой по сравнению со сплошным, обеспечивает требуемую прочность конструктивного элемента.

Проведено конечно-элементное моделирование деформирования стержней различного поперечного сечения при равновесии и колебаниях. В качестве материала использован композит со следующими механическими характеристиками: предел прочности 2000 МПа, модуль упругости 130 ГПа. Результаты автоматизированного расчета деформаций при первых и вторых формах колебаний балок представлены на рисунке 2 в виде соответствующих карт.

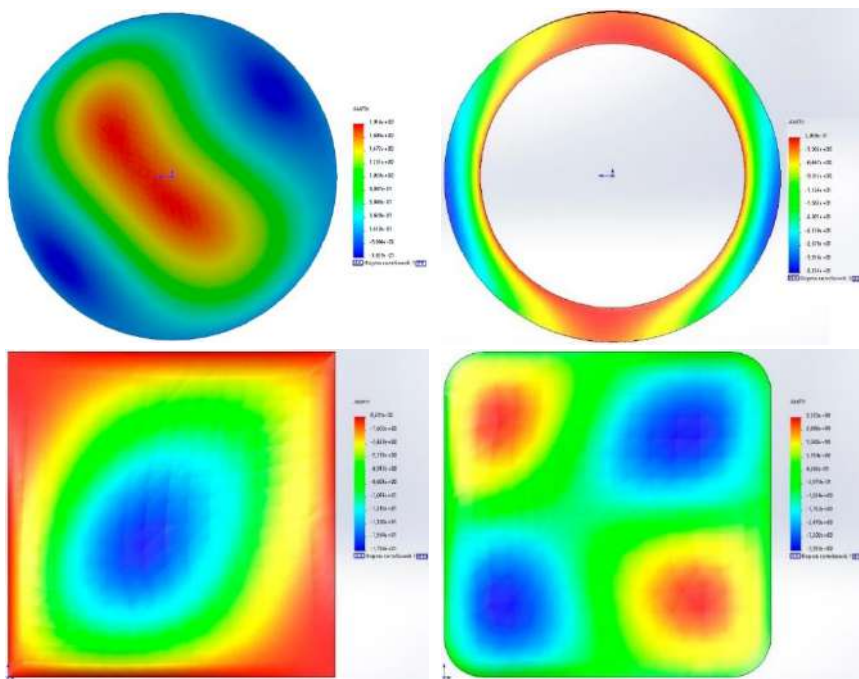


Рисунок 2 – Карты деформаций при собственных колебаниях различных сечений

Также определение собственных частот и форм колебаний балки может осуществляться путем решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где E – модуль упругости материала; J – момент инерции поперечного сечения; B_p – параметр, характеризующий инерционные свойства балки.

Разыскиваем решение дифференциального уравнения в виде

$$w(x, t) = W(x) \cdot \sin(\omega t),$$

где ω – круговая частота.

Для однородной балки постоянного сечения дифференциальное уравнение собственных колебаний принимает вид

$$\frac{EJ}{B_p} \cdot \frac{d^4 W}{dx^4} - \nu W = 0,$$

где $\nu = \omega^2$.

Поиск решения осуществлялся в виде тригонометрического ряда, удовлетворяющего условиям задачи.

Вывод: в процессе моделирования была установлена непригодность использования сплошных сечений ввиду их высокой инертности и, следовательно, увеличения массы конструкции целом. Анализ графиков собственных форм показал, что сплошные сечения можно успешно заменять тонкостенными: к примеру, кольцевое сечение имеет точно такую же собственную форму что и квадратное с сопряженными краями. Результаты работы могут быть применены для обучения студентов и оптимизации инженерных решений в аэрокосмической отрасли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Артоболевский, И. И.** Теория машин и механизмов : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1975. – 640 с.

2 Механические системы вакуумно-космических роботов и манипуляторов : учеб. пособие для вузов : в 2 т. / И. П. Бернацкий, Н. В. Василенко, Е. Н. Головёнкин [и др.]. – Томск : МГП «РАСКО», 1998. – Т. 1. – 465 с.

3 **Иванов, М. Н.** Детали машин / М. Н. Иванов. – М. : Высш. шк., 1991. – 382 с.

A. S. IVANOV, D. P. REIFSCHNEIDER, E. V. FALKOVA

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

STRESS AND NATURAL FREQUENCIES ANALYSIS FOR RODS WITH VARIOUS CROSS-SECTION CONFIGURATIONS

Based on the analysis of bending and tensile stresses, as well as the calculation of beam oscillation natural frequencies, the characteristics of circular, ring-shaped, and square cross-sections are compared. It is established that the thin-walled cross-sections (e. g., ring-shaped) reduce structural weight without compromising strength, unlike solid cross-sections with high inertia. The results of this investigation can be applied to the optimization of engineering solutions in the aerospace industry.

Keywords: rocket and space technology, strength, bending, tension, natural frequencies, composite materials, thin-walled section.

Получено 14.05.2025

УДК 531.15: 621.825.6

А. С. ИВАНОВ, Д. П. РЕЙФШНЕЙДЕР, Е. В. ФАЛЬКОВА
Сибирский государственный университет науки и технологий
им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ВЕДОМОГО ВАЛА ШАРНИРА ГУКА

Анализируется работа шарнирных соединений, где передача вращения между валами зависит от угла их взаимного расположения и положения ведущей вилки. Показано, что передаточное отношение достигает максимума при совпадении плоскостей вилки и осей валов и минимума – при их перпендикулярности, вызывая неравномерность вращения. Рост угла усиливает эту неравномерность, а при критических значениях передача движения становится невозможной. Результаты подчеркивают важность учета геометрических параметров при проектировании шарнирных систем для предотвращения неустойчивости и поломок.

Ключевые слова: шарнирное соединение, направляющие косинусы, передаточное отношение, коэффициент неравномерности.

Шарнирные соединения как важные компоненты механических систем требуют строгого соответствия геометрическим параметрам для гарантии безотказной работы и долговечности конструкции [1, 2].

Для определения взаимосвязи между углами поворота ведущего и ведомого валов шарнира Гука, в качестве которых выступают углы Эйлера α , φ_1 , φ_2 , формируется таблица направляющих косинусов, характеризующих ориентацию осей подвижной системы координат $x'y'z'$ относительно неподвижной xuz . Она имеет вид, представленный в таблице 1.

Таблица 1 – Направляющие косинусы

Неподвижные оси	Подвижные оси		
	x'	y'	z'
x	$\cos \alpha \cos \varphi_2$	$\cos \varphi_1$	0
y	$\sin \varphi_2$	$\sin \varphi_1$	0
z	$\sin \alpha \cos \varphi_2$	0	1

В матрице направляющих косинусов скалярное произведение любых двух строк, как и любых двух столбцов, равно нулю. Такое утверждение следует из ортогональности соответствующих осей координатных систем. Применительно к осям Ox' и Oy' получим

$$\cos \alpha \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1, \quad (1)$$

где φ_1 – некоторая функция времени, $\varphi_1 = f(t)$.

Выражение (1) называют кинематическим уравнением вращения ведомого вала. В случае равномерного вращения ведущего вала

$$\varphi_1 = \omega_1 t; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{ctg}(\omega_1 t) \cdot \cos \alpha.$$

Угловая скорость ω_2 ведомого вала может быть найдена дифференцированием (1) по времени. При $\alpha = \operatorname{const}$ получаем

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}.$$

Из данного выражения следует, что угловая скорость ведомого вала зависит не только от значения угловой скорости ω_1 , но и от текущего угла поворота ведущего вала. При равномерном вращении ведущего вала $\omega_1 = \operatorname{const}$ в случае фиксированного угла $\alpha = \operatorname{const}$ угловая скорость ω_2 является функцией угла φ_1 , поэтому вращение ведомого вала происходит с переменной скоростью.

Передаточное отношение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}.$$

При фиксированном угле α максимальное передаточное отношение наблюдается при значениях угла $\varphi_1 = 0, \pi, 2\pi$ и т. д., что соответствует положениям, при которых плоскость ведущей вилки совпадает с плоскостью осей валов. В этих случаях достигается максимальное значение передаточного отношения, которое определяется геометрической конфигурацией механизма:

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\max} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Минимальное передаточное отношение наблюдается при углах $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, то есть когда плоскость ведущей вилки расположена перпендикулярно плоскости осей валов. При такой геометрической конфигурации передаточное отношение минимально и составляет

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\min} = \cos \alpha.$$

Таким образом, передаточное отношение находится в интервале

$$\cos \alpha \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

На рисунке 1 представлены графики зависимости передаточного отношения от угла поворота ведущего вала для $\alpha = 0,1$ и $0,5$ рад. Из этих графиков следует, что увеличение угла α приводит к росту неравномерности вращения ведомого вала. Для количественной оценки этой нестабильности используется параметр,

известный как коэффициент неравномерности передачи, который отражает степень отклонения скорости ведомого вала от равномерного движения.

$$k = \frac{\omega_{2\max} - \omega_{2\min}}{\omega_1} = \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha.$$

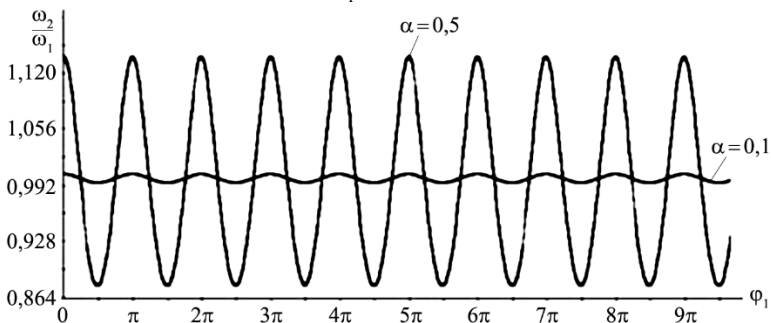


Рисунок 1 – Зависимость передаточного отношения от угла поворота ведущего вала

Результаты анализа показывают, что при $\alpha = 0^\circ$ коэффициент k равен нулю. Для небольших значений угла α параметр k остается незначительным, однако при увеличении данного угла наблюдается резкий рост коэффициента. При достижении $\alpha = 90^\circ$ значение k стремится к бесконечности, что делает передачу движения невозможной из-за критического нарушения кинематики механизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Крайнев, А. Ф.** Словарь-справочник по механизмам / А. Ф. Крайнев. – М. : Машиностроение, 1981. – 438 с.

2 **Шатров, А. К.** Механические устройства космических аппаратов. Конструктивные решения и динамические характеристики : учеб. пособие / А. К. Шатров, Л. П. Назарова, А. В. Машуков. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т., 2006. – 84 с.

A. S. IVANOV, D. P. REIFSCHNEIDER, E. V. FALKOVA

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

ROTATIONAL UNEVENNESS OF A HOOKE'S JOINT DRIVEN SHAFT

This paper analyzes the operation of articulated joints where the transmission of rotation between the shafts depends on the angle of their relative positions and the position of the drive yoke. It is shown that the gear ratio reaches a maximum when the yoke planes and shaft axes coincide, and a minimum when they are perpendicular, causing rotational unevenness. Increasing the angle intensifies this unevenness, and at critical values, motion transmission becomes impossible. The results highlight the importance of considering geometric parameters when designing articulated systems to prevent instability and failure.

Keywords: articulated joint, direction cosines, gear ratio, unevenness coefficient.

Получено 14.05.2025

УДК 531(091)

Д. В. КОМНАТНЫЙ

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
Гомель, Беларусь*

КРАТКИЙ АНАЛИЗ ТРАКТАТА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ «ФОРОНОМИЯ» Я. GERMANA

Выполнены краткое описание и анализ трактата по теоретической механике «Форономия» Якоба Германа. Выявлено влияние этого труда на дальнейшее развитие теоретической механики в трудах Л. Эйлера и Д. Бернулли. Проанализированы поставленные в трактате задачи и полученные результаты, являющиеся вкладом Я. Германа в создание современной теоретической механики. Указаны возможности использования материалов «Форономии» в учебном процессе современных вузов.

Ключевые слова: история теоретической механики, принцип Германа – Даламбера, Петербургская академия наук, преподавание теоретической механики.

Имя швейцарского математика и механика Якоба Германа (1678–1733) для специалистов по теоретической механике связано с созданием базового принципа кинестатики: принципом Германа – Даламбера.

Принцип уравнивания движущих сил, сил инерции и реакций связи Я. Герман высказал в своем главном труде по механике «Форономия» (Phoronomia), изданном в 1716 г. в Амстердаме на латинском языке. Ученый применил этот принцип для решения задачи о колебаниях составного маятника в виде невесомого стержня, несущего несколько материальных точек [1]. Тем самым трактат Я. Германа представляет существенный интерес для истории механики. Тем более это справедливо, так как «Форономия» является вторым обобщающим трудом по теоретической механике после основополагающих «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона. Долгое время трактат оставался единственным сочинением, где эта наука излагалась, как самостоятельная дисциплина [2]. Значительно влияние «Форономии» на творчество Л. Эйлера. Эйлер отзывался о книге Я. Германа как о блестящем сочинении, обогатившем учение о движении. Вместе с тем он отмечал, что изучение «Начал» Ньютона и «Форономии» Германа побудило его начать работу по изложению теоретической механики средствами математического анализа [2, 3].

Немаловажным обстоятельством, усиливающим интерес к творчеству Я. Германа, является и то, что в 1722 г. он был приглашен в состав Петербургской Академии наук. Приглашение поступило от имени Петра I по рекомендации крупного философа-лейбницианца Х. Вольфа. В 1725 г. Якоб Герман первым принял на себя обязанности академика. На этом посту Герман работал весьма активно и опубликовал в «Комментариях Петербург-

ской Академии наук» пятнадцать статей. Большой частью они посвящены математическому анализу и геометрии, но несколько работ – механике: о фигуре Земли, о мере движения – живой силе, о движении тел в сопротивляющейся среде, о колебаниях маятника, о движении двух тел, связанных нитью [1–3].

К сожалению, в 1731 г. ссоры с всемогущим советником академической канцелярии И. Д. Шумахером нарушили плодотворную работу Я. Германа в России. Он был вынужден уехать в Базель, получив звание почетного члена Петербургской академии наук [4]. Несмотря на это, Я. Герман успел внести значительный вклад в создание российской науки.

Из всего сказанного следует, что творчество Я. Германа заслуживает глубокого изучения. К сожалению, содержание «Форономии», полученные в ней результаты и примененные методы остались практически не описанными и системно не исследованными. В настоящей статье предпринята попытка заполнить такой досадный пробел и дать краткий анализ этого, в свое время очень известного, труда.

«Форономия» состоит из двух книг, первая из которых посвящена статике и динамике, вторая – гидромеханике. Несомненно, на выбор структуры книги повлияло построение «Начал» И. Ньютона. Так как Герман получил математическую подготовку в Базеле у Я. Бернулли, то являлся последователем школы Г.-В. Лейбница [3]. Однако Я. Герман хорошо знал и использовал при работе над «Форономией» результаты И. Ньютона, Х. Гюйгенса, П. Вариньона, так же как результаты Якоба и Иоганна Бернулли.

В основу механики Я. Герман положил синтетико-геометрический метод с инфинитезимальными соображениями. Эта особенность рассматриваемого труда существенно затрудняет его понимание и интерпретацию полученных результатов.

Во *введении* к трактату даны определения основных понятий: движение, пространство, время, сила, скорость. Из текста введения ясно, что в понимании пространства и времени Я. Герман следовал И. Ньютону, а в понимании сил – Лейбницу и его учению о мертвых и живых силах. Определение скорости у Германа как результата деления пути на время имеет прогрессивный для его времени характер. Понимание сил инерции у Германа совпадает с учением И. Ньютона. Масса тела понимается Германом в духе современной ему науки как количество материи или сумма корпускул, составляющих данное тело. Так как в математике эпохи Германа отсутствовали векторы, то Герман вводит особое понятие направления силы. Во введении можно найти формулировку третьего закона Ньютона.

Первая книга «Форономии» состоит из двух частей. Первая часть содержит три главы и посвящена статике. Вторая часть включает шесть глав и посвящена динамике.

В *первой главе* книги первой рассматривается понятие силы тяжести, но при этом ускорение силы тяжести g не выявляется. В *второй главе* описывается способ задания сил. Отсутствие векторов заставляет Германа изображать силы отрезками, направление которых совпадает с направлением действия силы. Эта идея позднее позволила ввести понятие вектора. Далее дается определение равновесия сил на основе многих опытов, выполненных ранее П. Вариньоном. Затем Герман приводит доказательство правила параллелограмма сложения сил. Такие доказательства приводились многими авторами впоследствии, так как вопрос о том, является ли правило параллелограмма теоремой или его следует принять за аксиому, оставался открытым вплоть до начала XX в. Далее следует доказательство теоремы Вариньона.

Затем Герман переходит к рассмотрению равновесия рычага под действием параллельных сил, направленных перпендикулярно рычагу, и обосновывает правило моментов. Далее рассматривается метод Гульдена для вычисления объемов тел. Потом рассматривается равновесие рычага под действием произвольно направленных сил. При этом осуществляется разложение сил на составляющие, аналогично треугольнику сил, и формулируются условия равновесия. Полученные условия переносятся на рычаги в форме произвольных кривых. В конце второй главы рассматривается равновесие поверхностей под действием распределенных сил и давления. Результаты представлены в сложной геометрической форме. В *главе третьей* Герман ставит и геометрически решает задачу о равновесии гибкой нити под действием произвольно направленных сил. Как частный случай им получены решения задач об эластике и о цепной линии.

В *первой главе* части второй рассматривается движение материальных точек по кривым линиям. При этом Герман вводит нормальную и касательную составляющие силы тяжести. Очевидно, эта идея оказала влияние на творчество Л. Эйлера. Также вводится понятие ускоряющего и замедляющего действий силы тяжести. Формулируется второй закон Ньютона в конечных величинах $F = m \frac{v}{t} = ma$ и в дифференциальной форме $F = m \frac{dv}{dt}$. Также второй закон Ньютона записывается в проекции на касательную к траектории $\vec{F}_\tau = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$. Доказывается теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $F ds = m v dv$. Доказательство проведено геометрически с громоздким чертежом. Затем доказана теорема о независимости скорости от пути при движении под действием силы тяжести. Формулируется закон сохранения механической энергии в форме, имеющейся у Торричелли и Гюйгенса: материальная точка при восходящем движении получает ту же скорость, которую потеряла при падении. Высказано положение

ние, соответствующее принципу эквивалентности гравитационной и инертной масс. И в завершение приводятся кинематические соотношения

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad gdx = vdv, \quad v^2 = 2gs, \quad t = \frac{2h}{v}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Заметно, что подход Я. Германа к изложению основных законов динамики весьма близок современному.

Вторая глава содержит разделы о вычислении нормальной составляющей центральной силы и момента количества движения, о втором законе Кеплера на основании предложения 1 книги 1 «Начал» Ньютона. Доказывается, что траектория материальной точки в поле тяготения – коническое сечение. Поставлена и решена задача: по диаграмме силы и данной начальной скорости найти траекторию материальной точки. Решение основано на работах И. Ньютона, П. Вариньона и И. Бернулли. Поставлена и решена обратная задача: по графической диаграмме силы притяжения найти ее зависимость от расстояния. В завершение главы Герман показывает, что его решение применимо в случае обратно пропорциональной кубу расстояния силы притяжения, которую рассматривали ранее И. Ньютон и И. Бернулли.

Третья глава посвящена различным задачам механики. В ней исследуются изохронные кривые при движении под действием графически заданной силы притяжения к центру и под действием силы тяжести. В частности, изложен результат Х. Гюйгенса: таутохроной при движении под действием силы тяжести является циклоида. Далее рассмотрен конический маятник и кривые равного давления. В современной терминологии это кривые, при движении по которым материальной точки сила реакции связи кривой остается постоянной во всех точках кривой. Такие кривые рассматривали И. Бернулли и Г. Фр. Лопиталь. Впоследствии обобщением этих кривых стали кривые Рибокура [5].

Четвертая глава содержит задачу о движении перигитров эллиптических орбит (например, перигелия и афелия Земли). Герман выводит отношение между силой тяготения, создающей орбиту с подвижными перигитрами, и силой тяготения в случае неподвижной орбиты и сравнивает свое решение с решениями И. Ньютона и Д. Грегори.

В *пятой главе* рассматриваются колебания составного маятника. Именно в этой главе высказана идея об уравнивании сил инерции и сил тяжести, развитием которой явились «петербургский принцип» и принцип Германа – Даламбера. В результате решения задачи Герман получает выражение для длины простого маятника, изохронного с составным. Для усложнения задачи Герман рассмотрел колебания составного маятника, грузы которого имеют разную плотность при одинаковом объеме и погружены в жидкость. Тогда на грузы действует сила Архимеда, а сила сопротивления среды Германом не учитывается. Поэтому постановка задачи является чисто академи-

ческой. Тем не менее Герман показывает справедливость для такой колебательной системы закона сохранения механической энергии, в форме, указанной Гюйгенсом. Также Герман сравнивает свои результаты с решением аналогичной задачи у И. Бернулли.

Шестая глава содержит теорию удара. Эта теория излагается по Гюйгенсу на основании закона сохранения механической энергии. При рассмотрении удара неупругих тел применяется закон сохранения количества движения по Валлису. Основное внимание Герман уделяет расчету движения центра тяжести соударяющихся тел. Но им вычисляются и послеударные скорости упругих тел. Представляет интерес данный Германом анализ последовательного удара трех и четырех неупругих тел.

Книга вторая «Форономии» разделена на четыре части, но главы нумеруются последовательно по всей книге.

Глава первая книги второй содержит определения основных понятий механики жидкости. Затем рассматриваются силы реакции опоры и условия равновесия жидкости в сосуде. В конце главы описаны гидростатическое давление и способ графического задания плотности и давления жидкости.

Вторая глава рассматривает давление жидкости на стенки сосуда. Результаты выражены в архаической форме: вес жидкости, действующей на поверхность, сравнивается с весом некоторого столба воды. Высказывается положение о зависимости давления в трубе от ее размеров и допустимого давления. Но расчет Германа занижает давление в два раза по сравнению с современной формулой Барлоу. Также Герман предпринял попытку рассматривать деформации стенки сосудов под давлением.

Третья глава посвящена равновесию тел, плавающих в воде. Рассмотрены задача о погружении на заданную глубину шара с полостью, задача о равновесии стержня, погруженного в жидкость и удерживаемого нитью, о равновесии треугольной призмы.

Четвертая глава рассматривает возможную форму, которую принимает стенка сосудов под давлением. В частности рассмотрены деформация стенок вертикальной цилиндрической трубы и полотна парусины под действием неоднородной жидкости. Давление жидкости задается графически.

В *пятой главе* описываются барометры, а в *шестой* – вакуумные насосы. Эти главы имеют более прикладное значение.

В *седьмой главе* анализируются упругость и давление воздуха. Причем Герман использует представление о воздухе как совокупности гигантского числа молекул. В дальнейшем эти молекулярно-кинетические представления развил Д. Бернулли в «Гидродинамике».

Глава восьмая посвящена изучению свойств изотермической атмосферы и ее изменений с высотой. При этом введена умозрительная зависимость между давлением и плотностью воздуха. Тем не менее в главе 8 путем геометрических построений получена барометрическая формула. Поставлена и

решена задача: по графику высот и показаниям ртутного барометра построить диаграммы давления и плотности атмосферы в зависимости от высоты.

В *главе девятой* рассматривается истечение жидкостей из сосудов. Для решения задач применяются уравнение непрерывности и формула Торричелли, выраженные в форме пропорций. Результаты представлены в геометрической форме, поэтому они трудно сопоставимы с современными. В *десятой главе* изучается течение жидкости в наклонном канале. Герман наряду с уравнением непрерывности использует соотношение между скоростью, силой тяжести и гидравлическим сопротивлением. Это соотношение, хотя и недостаточно адекватное, является первой попыткой сформулировать закон Бернулли. Окончательный вывод закона дал Д. Бернулли в «Гидродинамике».

В *главе одиннадцатой* рассмотрено обтекание прямоугольной пластинки потоком жидкости. Результаты Германа, полученные в этой главе, не представляют интереса, так как он не мог решить задачу без использования конформных преобразований.

В *главе двенадцатой* рассмотрены силы сопротивления движению тел в жидкости. Изучено сопротивление движению треугольника и конуса. Разобраны задачи о конусе наименьшего сопротивления и о теле вращения наименьшего сопротивления. Решение последней задачи сравнивается с решением И. Бернулли, а о решении И. Ньютона не упоминается. Далее рассматривается сопротивление движению тел, сечение которых плоскостью, проходящей через ось вращения, имеет сложную форму и может быть описано соединенными отрезками тех или иных кривых. При этом тело движется в жидкости поступательно по прямой, расположенной под углом к оси вращения. Решение этой задачи представлено геометрически.

Тринадцатая глава посвящена задаче о парусной кривой (кривой, описывающей сечение паруса, раздутого ветром). Решение дается в геометрической форме, поэтому оно громоздко. Ему предпосланы две весьма объемные леммы.

С *главы четырнадцатой* начинается рассмотрение движения тел под действием сил тяжести и сопротивления. В начале главы приведена теорема об изменении кинетической энергии при действии указанных сил. Затем осуществлено исследование логарифмических кривых, которые применяются для дальнейших исследований.

В *главе пятнадцатой* рассматривается движение материальной точки при сопротивлении, пропорциональном первой степени скорости. Рассмотрены движение под действием только этой силы по прямой, падение тела под действием сил тяжести и сопротивления, рассчитана траектория тела, брошенного под углом к горизонту в среде. Результат решения последней задачи сравнивается с решениями И. Ньютона и Х. Гюйгенса и доказываются, что все три решения совпадают по существу.

В *шестнадцатой главе* рассмотрено движение тел под действием силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости. Рассмотрены задачи о

движении материальной точки по прямой, и о максимальном подъеме материальной точки, брошенной вертикально вверх.

Глава семнадцатая содержит задачи о движении материальной точки под действием силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, и силы вязкого трения. Изучено движение по прямой и падение по вертикальной прямой. Для последнего случая найдено максимальное расстояние, пройденной материальной точкой до остановки.

В *главе восемнадцатой* решается задача о движении материальной точки в воздухе изменяющейся плотности и при произвольном законе сопротивления. В частном случае рассматривается движение вертикально вверх. При этом решение проведено аналитически на основе теоремы об изменении кинетической энергии. Эти разделы «Форономии» рассматривают задачи, долгое время остававшиеся основными для сочинений по механике [6]. Несомненно, они оказали влияние на творчество Л. Эйлера.

В *главе девятнадцатой* решается задача о движении материальной точки по кривой в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости, под действием силы тяжести. В частном случае рассматриваются траектории в виде прямой и циклоиды. В последнем случае решение Германа совпадает с решением Ньютона, опубликованном в «Началах», однако имеет трудно понимаемую геометрическую форму.

В *двадцатой главе* рассмотрено движение по кривой, при котором на материальную точку действует сила притяжения, направленная по касательной к кривой в каждой точке, и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Представлено длинное геометрическое решение.

Глава двадцать первая посвящена динамике парусного судна. Принимается, что на судно действует сила давления ветра на парус, пропорциональная относительной скорости ветра и судна. Парус поставлен под углом к ветру. К сожалению, Герман не учел аэродинамический профиль паруса, а сопротивление движению судна принял крайне неясным образом. Поэтому его решение недостаточно точное и имеет громоздкую геометрическую форму.

В *двадцать второй главе* излагаются результаты И. Ньютона об определении формы Земли из гидростатических начал, а также выводится форма поверхности жидкости, образовавшейся во вращающемся цилиндрическом сосуде.

Двадцать третья глава посвящена акустике. Вычисляется скорость звука в предположении, что частицы воздуха совершают гармонические колебания. Найдена длина маятника, изохронного периоду звуковой волны.

В *двадцать четвертой главе* исследуются колебания молекул воздуха с учетом диссипации энергии. Результаты используются при анализе колебаний воздуха в экспериментальной установке для определения скорости звука. Примечательным обстоятельством является то, что в главе имеется одна из первых попыток изучения процессов в газах на основе молекулярно-кинетической теории.

В *приложении* к основным главам «Форономии» интересны разделы о вычислении моментов инерции по Х. Гюйгенсу, описание методов интерполяции, вывод формулы Торричелли. Кроме того, в приложении решена задача о движении материальной точки по заданной кривой под действием силы притяжения, направленной по нормали к кривой. График зависимости силы от расстояния представляет собой эволюту траектории.

Даже такое краткое описание содержания «Форономии» показывает, что труд Я. Германа значительно повлиял на развитие теоретической механики. Заслугой Я. Германа является то, что он пренебрег конфликтом научных школ Ньютона и Лейбница [7] и объединил полученные ими результаты в системном и основательном виде. Это имело большое значение для формирования современных представлений в теоретической механике. В «Форономии» рассмотрены задачи, имеющие техническое значение: о движении жидкости в трубах и каналах, о движении парусников. Таким образом, впервые в этой книге теоретическая механика рассматривается и как инструмент познания природы, и как основа для развития техники.

Частные результаты «Форономии» также имели большое значение для развития теоретической механики. Уже упоминалось, что в этой книге дано близкое к современному определение скорости, которое не решался дать позже Ж.-Л. Даламбер [8]. Идея разложения сил, ускорений и скоростей на нормальную и касательную составляющие получила развитие в трудах Л. Эйлера [1]. Я. Герман начал применять молекулярно-кинетические представления для анализа процессов в газах и жидкостях, далее этот подход был развит Д. Бернулли в его «Гидродинамике» [9]. Неоспорим вклад Я. Германа в создание «петербургского принципа», формы основного принципа кинетики, который носит имена Я. Германа и Ж.-Л. Даламбера.

Можно указать неполные результаты, приведенные Я. Германом в его книге, которые тем не менее послужили для дальнейшего развития механики. Это вопросы статики оболочек, задача о кривых Рибокура, исследование сосудов и труб под давлением, обтекания пластинок, движения жидкости в руслах каналов. Исследование движения парусного судна продолжил, в частности, Л. Буге [1]. Некоторые задачи из «Форономии»: о равновесии тел в жидкости, о движении материальных точек в среде с сопротивлением, об ударе – могут найти свое место при преподавании теоретической механики. Естественно, потребуется их переработка аналитическим методом.

Поэтому допустимо сделать общий вывод: труд Я. Германа представляет существенный интерес для истории теоретической механики, для ее методологии, а также может использоваться при преподавании этой науки. Поэтому работа Якоба Германа сохраняет свое значение и в современности, заслуживает внимания исследователей.

Изложение содержания «Форономии» выполнено по [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Яковлев, В. И.** Начала аналитической механики / В. И. Яковлев. – М. ; Ижевск : Издательство Института компьютерных исследований, 2002. – 339 с.
- 2 **Григорьян, А. Т.** Очерки истории механики в России / А. Т. Григорьян. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 289 с.
- 3 **Юшкевич, А. П.** История математики в России до 1917 г. / А. П. Юшкевич. – М. : Наука, 1968. – 591 с.
- 4 **Энциклопедический словарь** : в 20 т. / изд. Ф. А. Брокгауз и И. А. Ефрон. – СПб. : Типо-литография И. А. Ефрона, 1893. – Т. VIIIА. – 625 с.
- 5 **Савелов, А. А.** Плоские кривые / А. А. Савелов. – М. : Физматгиз, 1960. – 294 с.
- 6 **Жуковский, Н. Е.** Аналитическая механика / Н. Е. Жуковский. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.
- 7 **Дуран, А.** Истина в пределе. Анализ бесконечно малых / А. Дуран. – М. : Де Агостини, 2014. – 144 с.
- 8 **Даламбер, Ж.-Л.** Динамика / Ж.-Л. Даламбер. – Новокузнецк : ИО НФМИ, 2000. – 336 с.
- 9 **Григорьян, А. Т.** Д. Бернулли. 1700–1782 / А. Т. Григорьян, Б. Д. Ковалев. – М. : Наука, 1981. – 313 с.
- 10 **Herman, J.** Phoronomia. Transl. in English by I. Bruce. – URL : <https://www.17centurymaths.com/contents/hermanphoronomia.htm> (дата обращения : 25.09.2024).

D. V. KOMNATNY

Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus

A BRIEF ANALYSIS OF JAKOB HERMANN'S TREATISE ON THEORETICAL MECHANICS, "PHORONOMIA"

A brief description and analysis of Jacob Hermann's treatise on theoretical mechanics, "Phoronomia" is implemented. The influence of this work on the subsequent development of theoretical mechanics in the works of L. Euler and D. Bernoulli is revealed. The problems posed in the treatise and the obtained results are analyzed, representing Hermann's contribution to the creation of modern engineering mechanics. The possibilities of using the materials of "Phoronomia" in the educational process at modern universities are discussed.

Keywords: history of theoretical mechanics, Hermann – d'Alembert principle, St. Petersburg Academy of Sciences, teaching theoretical mechanics.

Получено 02.05.2025

К ЮБИЛЕЮ УЧЕНОГО (FOR THE SCIENTIST'S ANNIVERSARY)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 18. Гомель, 2025

УДК 539.43(092)

С. А. ТЮРИН¹, В. В. КОМИССАРОВ²

¹Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
Гомель, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

К 90-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА Л. А. СОСНОВСКОГО

Статья посвящена жизни и научному наследию выдающегося ученого, профессора Леонида Адамовича Сосновского (1935 г. р.), основателя новой технической науки – трибофатики. Рассматриваются ключевые направления его научной деятельности: разработка методологических основ трибофатики и ее практическое применение в промышленности, создание механотермодинамики как синтеза механики и термодинамики, а также формулировка обобщенной теории эволюции систем, включая системы с элементами разума. Подчеркивается международное признание трибофатики, ее институционализация в виде межведомственной лаборатории и координационного совета, а также значительный экономический эффект от внедрения разработок. Отмечается многогранность личности Л. А. Сосновского – не только ученого, но и поэта, философа и патриота. Статья подготовлена к юбилею ученого и отражает его вклад в развитие науки, техники и образования в Беларуси и за ее пределами.

Ключевые слова: Леонид Сосновский, трибофатика, механотермодинамика, обобщенная теория эволюции, научное наследие, практическое применение, Беларусь.

В 2025 г. научная общественность отметила 90-летие со дня рождения выдающегося ученого, философа, доктора технических наук, профессора Леонида Адамовича Сосновского и 35-летие трибофатики – созданной им новой технической науки, которая становится междисциплинарной наукой, позволяющей перейти к целостному пониманию как окружающей природы, так и внутреннего мира человека.



Сосновский
Леонид Адамович

Сосновский Леонид Адамович родился 25 июля 1935 года в д. Полесье. Окончил Шиловичскую СШ с серебряной медалью (1953), Ленинградский орден Ленина и Трудового Красного Знамени горный институт имени Г. В. Плеханова (1958), аспирантуру Центрального научно-исследовательского института технологии машиностроения (Москва, 1967). Кандидат технических наук (1967), доцент (1976), доктор технических наук (1987), профессор (1988).

Лауреат Государственной премии Украины (1997), Заслуженный деятель науки Республики Беларусь (1998), член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (с 2006), сопредседатель Международного координационного совета по трибофатике (с 1993). Автор более 900 научных работ и изобретений, в том числе около 40 книг: монографий, справочников, учебных пособий. Почетный гражданин г. Чечерска.

Путь в науку Леонид Адамович начал в 1958 г. на одном из машиностроительных заводов Урала (г. Александровск), где он в течение 7 лет получал глубокие практические знания и инженерную закалку. Потом были Пермский политехнический, ЦНИИТМАШ в Москве, ВНИИкомпрессормаш на Украине и, наконец, снова Родина – сначала Могилев (МТИ), затем Гомель, БелИИЖТ (ныне БелГУТ), где он работал более 30 лет. И всё это была дорога в науке, последовательно от одного к другому достижению; всё это был, по большому счету, неустанный путь к истине, на котором он оставил, безусловно, глубокий след.

В краткой заметке нет возможности описать многие и высокие достижения профессора Л. А. Сосновского. Поэтому мы здесь расскажем только о некоторых из них – в науке и практике.

Трибофатика. Одна из вершин научного творчества Леонида Адамовича. Как писал министр образования и науки Республики Беларусь В. И. Стражев, «рождение новой науки случается не так часто в наше время, поэтому оно, несомненно, составляет честь для любого государства... Республика Беларусь является колыбелью трибофатики. Это было признано крупными учеными нашего времени». Аналогична оценка академика РАН и НАН Беларуси, Героя Социалистического труда, вице-президента РАН, директора ИМАШ РАН им. А. А. Благонравова К. В. Фролова, который отмечал, что именно в Беларуси родилась и успешно развивается новая наука – трибофатика, один из наиболее перспективных разделов механики. И на долю Леонида Адамовича выпала честь стать основоположником новой технической

науки. Именно он разработал ее методологический, теоретический и экспериментальный фундамент.

К настоящему времени опубликовано более 1200 научных работ, в том числе более 20 книг и монографий; разработано 8 государственных стандартов, в том числе 3 межгосударственных; получено 18 патентов; издано 5 учебных пособий для технических университетов, в том числе 2-томный курс «Основы трибофатики», утвержденный Министерством образования Республики Беларусь и изданный на английском и китайском языках. Проведено 8 международных симпозиумов по трибофатике в четырех странах: (Гомель (1993), Москва (1996), Пекин (2000), Тернополь (2002), Иркутск (2005), Минск (2010), Гомель (2015), Харбин (2025)). 120 ученых разных стран, в том числе 16 представителей Беларуси, награждены почетными дипломами «За вклад в развитие трибофатики». 25 ученых и специалистов разных стран награждены почетными юбилейными знаками «ТРИБОФАТИКА-25» за особый вклад в организацию Международных симпозиумов и проведение НИОКР в этой области на протяжении более 10 лет. С 1996 г. работает Международный координационный Совет по трибофатике, утвержденный академиями наук Беларуси, России и Украины (сопредседатели: Н. А. Махутов, Л. А. Сосновский, В. Т. Трощенко, Гао Ванчжен).

С целью сосредоточения сил и средств на перспективном направлении, объединения научно-производственно-образовательного потенциала для ускоренного и конкретного решения междисциплинарных проблем в 2004 г. Государственный комитет по науке и технологиям Республики Беларусь, Национальная академия наук Беларуси, Министерство промышленности Республики Беларусь и Министерство образования Республики Беларусь подписали Протокол о создании Межведомственной лаборатории «ТРИБОФАТИКА». Эффективность ее работы оказалась высокой. Так, уже в 2005 г. был получен экономический эффект свыше 2,5 млн долларов США. Член-корреспондент РАН Н. А. Махутов – зав. отделом прочности, ресурса и безопасности ИМАШ им. А. А. Благонравова РАН, председатель Совета МГС по ЧС по проблемам предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций РФ – констатировал: «Трибофатика стала предметом конкретной деятельности для инженеров».

Приведем всего один пример использования научных идей трибофатики в производстве.

В 2012 г. ПО «Гомсельмаш», по данным его планово-экономического управления, сэкономило 740 000 евро (в результате решения задачи импортозамещения) и получило прибыль около 2,5 млрд бел. рублей – это был первый год внедрения в производство важной разработки группы ученых и специалистов ООО «НПО ТРИБОФАТИКА» и ПО «Гомсельмаш» под руководством профессора Л. А. Сосновского.

Дело в следующем. Более 20 лет завод совместно с рядом НИИ и университетов решал задачу о создании ножей режуще-измельчающих аппаратов для сельскохозяйственных комбайнов. Нож – мал золотник, да дорог: производительность, технический уровень и качество огромного комбайна (массой более 10 тонн) напрямую и в большой степени определяется маленькими ножами (вес которых составляет менее 1 кг). В итоге были приняты импортные ножи, изготавливаемые из высококачественной и особо прочной стали, при этом режущие кромки ножей дополнительно упрочняются специальными твердыми сплавами. Когда за дело принялась группа специалистов и ученых под руководством Л. А. Сосновского, был изобретен сталистый высокопрочный чугун. Этот новый конструкционный материал обладает высокими механическими свойствами, как сталь, и высокотехнологичными свойствами, как чугун! Ножи режуще-измельчающих аппаратов современных с.-х. комбайнов и были изготовлены из этого нового материала.

Механотермодинамика. Более 150 лет в рамках механики и термодинамики разрабатывается теория эволюции. Теория эволюции, построенная в термодинамике, оказалась ущербной: она прогнозирует грядущую тепловую смерть Вселенной, а к настоящему времени ученый мир осознал, что таковой не будет. В механике общую теорию эволюции систем до сих пор разработать не удалось, потому что в ее уравнениях не различается прошлое и будущее: они одинаково работают при замене времени $+t$ (будущее) на $-t$ (прошлое).

Профессору Л. А. Сосновскому в сотрудничестве с молодым и перспективным ученым С. С. Щербаковым (БГУ) на стыке этих двух фундаментальных разделов физики удалось построить основания механотермодинамики. Для желающих более детально узнать, как это было сделано, приведем здесь цитату из их монографии «Принципы механотермодинамики» (2014).

«Перед Вами, читатель, небольшая книжка, она свидетельствует о рождении новой физической дисциплины – механотермодинамики. Такое случилось, когда были построены два мостика. Один – это трибофатическая энтропия, которая проложила путь от термодинамики к механике. Другой – это данное в трибофатике фундаментальное представление о необратимой повреждаемости всего сущего, которое вымостило дорогу от механики к термодинамике. Этот путь и эту дорогу взаимно пронизывают диалектические Л-взаимодействия между повреждениями, обусловленными нагрузками разной природы (механической, термодинамической, электрохимической и др.), и характерными составляющими энтропии (термодинамической, трибофатической, химической и др.). Механотермодинамическая система как типичная и важная компонента реального мира и её эволюция становятся, таким образом, объектами для изучения в естествознании и требуют философского осмысления».

Приведем пример еще одной работы ученого. Тяжелые железнодорожные рельсы – один из самых ответственных, массовых и высоконагруженных

объектов современной техники. Требования к эксплуатационной стойкости рельсов постоянно повышаются, поскольку мир требует перевозить всё больше грузов (и людей) на всё более длинные расстояния при неуклонно возрастающих скоростях движения. Таким образом, железнодорожный путь имеет большое стратегическое, военное и технико-экономическое значение. Поэтому на железнодорожном транспорте Беларуси занято 1,7 % работоспособного населения (в России – 1,3 %), и они дают 2,7 % валового национального продукта (в России – 2,0 %).

Расчеты показывают: стоимость рельсов из сталистого чугуна более чем в 2 раза меньше стальных, а эксплуатационная долговечность примерно одинакова. И основной потребитель тяжелых рельсов – ОАО «Российские железные дороги» – поддержало этот проект. В ПО «Гомсельмаш» под руководством Леонида Адамовича сделаны первые такие рельсы. Они прошли успешную опытную эксплуатацию на Гомельской дистанции пути, и была изготовлена первая партия рельсов для натурных испытаний на экспериментальном кольце ВНИИЖТа (под Москвой).

Обобщенная теория эволюции. 2011 год. В Минске работает один из высших научных форумов – Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике. Знаменитый Овальный зал Президиума НАН Беларуси. Более 500 участников, ученых и специалистов многих стран. Профессор Л. А. Сосновский выступает с пленарным докладом «*Динамические системы с элементами разума: проблема и перспективы исследования*». С элементами разума?! Еще несколько лет назад никто не мог даже хотя бы сформулировать (тем более поставить) задачу такого уровня. А тут сообщаются уже полученные результаты. Оказывается, что при движении систем в определенных условиях ее элементы неизбежно повреждаются, что ведет к возникновению новой информации. Это так называемая трибофатическая триада: движение порождает новую информацию в системе, если индекс ее повреждаемости ненулевой; информация оказывается положительной, когда система упрочняется, и отрицательной, когда она разупрочняется. А количественное накопление информации время от времени возбуждается скачками, при которых критическая информация переходит в новое качество – осознанную информацию, которая и есть «элемент разума». И через год Леонид Адамович формулирует уже основы обобщенной теории эволюции. Это произошло в 2012 г. на Междисциплинарном научном семинаре «Философские проблемы естествознания и техники» в Институте философии НАН Беларуси.

Что значит обобщенная теория эволюции? К настоящему времени ученые разработали хорошо известные теории эволюции: биологических, геологических, социальных и других систем. И вот обобщение: теория эволюции любых систем, неорганических и органических, в том числе живых и разумных. В основу теории кладется новый философский постулат: «Повреждае-

мость всего сущего не имеет мыслимых границ». Так, формулируется новая концепция жизни: «Жизнь есть особый способ накопления повреждений». Эта концепция признается интересной, перспективной, и она получает все большее понимание и признание.

Леонид Адамович Сосновский – автор не только научных работ. Он опубликовал три томика стихов. Под его редакцией (и с его участием) вышел в свет интересный сборник стихов поэтов-чечерян и школьников, начинающих высказываться поэтически. Написанные в разное время, его стихи отражают широкую мозаику чувств и мыслей автора, свидетельствуют о богатой душе самобытного, интересного человека. Во многих его произведениях живет философская мысль, что призывает читателя к размышлениям.

До последних дней Леонид Адамович упорно и интенсивно работал, хотя с сожалением признавал, что физические силы уже не те, и он уже не может, как прежде, работать ежедневно по 14–16 часов, а только по 10–12 часов. «Но мозг работает как часы, и интенсивнее прежнего» – говорил Леонид Адамович. И, пожалуй, эффективнее прежнего, как казалось окружающим его ученикам и коллегам. Это естественно: его мозг опирался на громадный массив накопленных знаний в различных областях современной науки.

Для своих близких Леонид Адамович был опорой, любящим мужем, мудрым отцом и заботливым дедушкой, чья доброта и поддержка создавали прочный фундамент для семейного очага. Эта гармония личной жизни и научного служения стала еще одной гранью его удивительной личности.



Леонид Адамович с супругой и дочерьми

Сосновский Л. А. – настоящий гражданин и патриот своей страны, который искренне верил, что приоритет Беларуси в ряде научных разработок не только ставит республику на передовые научные рубежи, но и позволит практически сделать продукцию наших предприятий конкурентоспособной на мировом рынке. Этот человек кристальной честности, глубокой порядочности и высокой культуры пользовался заслуженным авторитетом, уважением и доверием у коллег, студентов, учеников. Его жизнь – достойный пример для многих поколений ученых, производственников, педагогов.

По поручению коллег и учеников профессора Л. А. Сосновского.

S. A. TYURIN¹, V. V. KOMISSAROV²

¹*Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

ON THE PROFESSOR L. A. SOSNOVSKY 90th ANNIVERSARY

The article is dedicated to the life and scientific legacy of the outstanding scientist, professor Leonid Adamovich Sosnovsky (born 1935), the founder of a new technical science – tribo-fatigue. The key areas of his scientific work are considered: the development of the methodological foundations of tribo-fatigue and its practical application in the industry, the creation of mechano-thermo-dynamics as a synthesis of mechanics and thermodynamics, and the formulation of a generalized theory of system evolution, including systems with elements of intelligence. The article emphasizes the international recognition of the tribo-fatigue, its institutionalization in the form of an interdepartmental laboratory and coordinating council, and the significant economic impact of implementing his developments. The article also highlights Sosnovsky's multifaceted personality – not only as a scientist but also as the poet, the philosopher, and the patriot. This article was prepared for the scientist's anniversary and reflects his contribution to the development of science, technology, and education in Belarus and abroad.

Keywords: Leonid Sosnovsky, tribo-fatigue, mechano-thermo-dynamics, generalized theory of evolution, scientific legacy, practical application, Belarus.

Получено 02.10.2025

Научное издание

**Механика.
Исследования и инновации**

Международный сборник научных трудов

Выпуск 18

Научный редактор А. О. Шимановский

Редактор А. А. Павлюченкова
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 30.12.2025 г. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 13,11. Тираж 100 экз.
Зак. № 2265. Изд. № 65.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель