

УДК 691-419:539.371

В. С. САЛИЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ИЗГИБ ЗАЩЕМЛЁННОЙ ПО КОНТУРУ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрено деформирование круговой симметричной по толщине пятислойной пластины в случае действия равномерно распределенной нагрузки. Предполагается, что для тонких внешних и внутренних несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. Сравнительно толстый заполнитель деформируется в соответствии с гипотезой Тимошенко. При выводе уравнений равновесия вариационным методом Лагранжа принята во внимание работа тангенциальных напряжений в заполнителе. Проведена численная апробация полученного аналитического решения.

Ключевые слова: пятислойная круговая пластина, изгиб, аналитическое решение.

Введение. Разработка методов решения новых краевых задач о деформировании неоднородных элементов конструкций представляет значительную актуальность в связи с их широким применением в практике строительства и технике. В книгах [1–4] представлены теория и механико-математические модели, описывающие деформирование трехслойных стержней, пластин и оболочек. Публикации [5, 6] посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных круглых пластин с легким сжимаемым заполнителем. В статьях [7, 8] рассмотрен изгиб трехслойных пластин, расположенных на основании Пастернака. Неосесимметричное деформирование трехслойных пластин исследовано в работе [9]. Изгиб трехслойных пластин в тепловом и нейтронном потоках анализируется в статьях [10, 11].

В статьях [12, 13] представлены обзоры литературных источников о деформировании многослойных панелей, в которых использованы различные аналитические и конечно-элементные модели. В работах [14–18] приведены результаты исследований статики и колебаний прямоугольных пятислойных пластин. Имеется лишь несколько зарубежных публикаций об анализе напряженно-деформированного состояния пятислойных пластин круговой и кольцеобразной формы, выполненном с применением различных асимптотических теорий [19–21].

Постановка краевой задачи о динамическом деформировании пятислойной круговой пластины приведена в [22]. Здесь на основе аналогичных кинематических гипотез рассмотрен изгиб упругой симметричной по толщине пластины с жесткими заполнителями, защемленной по контуру.

Постановка и решение краевой задачи. Изгиб круговой пластины, пять слоев которой расположены симметрично по толщине (рисунок 1), рассматривается в цилиндрической системе координат, которая связана с плоско-

стью симметрии центрального несущего слоя 1. Для описания деформирования тонких несущих слоев 1, 2, 4 приняты гипотезы Кирхгофа, жестких нежимаемых по толщине заполнителей 3, 5 – гипотеза Тимошенко, предполагающая прямолинейность и нежимаемость деформированной нормали, которая при этом поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$.

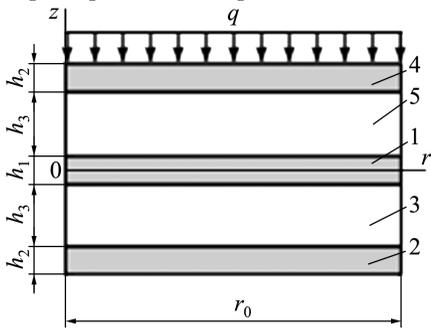


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$u_r^{(4)} = -zw_{,r} + h_3\psi \quad (0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2);$$

$$u_r^{(1)} = -zw_{,r} \quad (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1);$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi \quad (-0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3);$$

– в заполнителях 3, 5

$$u_r^{(5)} = -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi \quad (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3);$$

$$u_r^{(3)} = -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi \quad (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1),$$

(1)

где z – координата точки рассматриваемого слоя; расположенная в нижнем индексе запятая соответствует операции дифференцирования по следующей за ней координате.

Зная перемещения (1), деформации получим из соотношения Коши [1], напряжения – из закона Гука. Соответствующая система дифференциальных уравнений, описывающая равновесие рассматриваемой пластины, получена в [23]:

$$L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2h_3G_3\psi = 0; \quad L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q, \quad (2)$$

где a_i – коэффициенты:

$$a_4 = \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; \quad a_5 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_6 = \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_7 = \left[2K_2^- h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-;$$

G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования; L_2, L_3 – операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg) \right)_{,r}, \quad ,_r \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r}, \quad ,_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

На контуре пластины должны выполняться граничные условия:

$$\psi = 0, \quad w = w_{,r} = 0. \quad (3)$$

Относительный сдвиг и прогиб пластины, удовлетворяющие системе уравнений (2) и граничным условиям (3), получены в виде

$$\psi = \frac{a_5 q}{4a_6 h_3 G_3} \left(r_0 \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta r_0)} - r \right);$$

$$w = \frac{a_5^2 q}{4a_6^2 h_3 G_3} \left(r_0 \frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta r_0)}{\beta I_1(\beta r_0)} - \frac{r^2 - r_0^2}{2} \right) + \frac{q}{64a_6} (r^2 - r_0^2)^2,$$

где $I_0(r), I_1(r)$ – функции Бесселя.

Численные результаты. Исследованы перемещения в защемлённой по контуру пятислойной пластине, материал несущих слоев которой – дюралюминий, заполнителя – фторопласт-4 (их упругие характеристики приведены в [1]). Значение нагрузки принималось $q_0 = 10$ МПа. Толщины слоев и радиальная координата задавались в долях радиуса r_0 .

Рисунок 2 показывает, как изменяются относительный сдвиг (а) и прогиб (б) в зависимости от распределения материала между наружными и внутренним несущим слоем при постоянной толщине заполнителей $h_3 = h_5 = 0,2$.

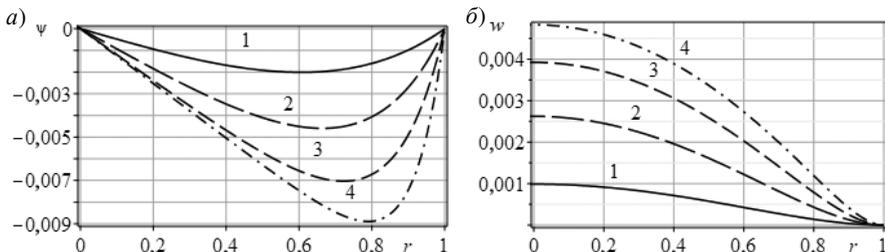


Рисунок 2 – Сдвиг в заполнителе (а), прогиб пластины (б) в случаях:

1 – $h_1 = 0, h_2 = 0,03$ (трехслойная пластина); 2 – $h_1 = 0,02, h_2 = 0,02$;

3 – $h_1 = 0,04, h_2 = 0,01$; 4 – $h_1 = 0,06, h_2 = 0$

Результаты расчетов показывают, что увеличение толщины центрального несущего слоя за счет материала внешних слоев приводит к уменьшению жесткости пластины и росту относительного сдвига и прогиба. Перемещения увеличиваются в 2,5; 4; 5 раз соответственно.

Вывод. Построенная механико-математическая модель изгиба пятислойной упругой пластины и предложенное аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать ее перемещения не только при постоянной, но и при любой осесимметричной нагрузке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 2 **Aghalovyan, L.** Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 3 **Reddy, J. N.** Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / J. N. Reddy. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 4 **Altenbach, H.** Mechanics of Composite Structural Elements / H. Altenbach, J. Altenbach, W. Kissing. – Singapore : Springer Nature, 2018. – 503 p.
- 5 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
- 6 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
- 7 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.
- 8 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.
- 9 **Нестерович, А. В.** Напряжённое состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
- 10 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.
- 11 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины нейтронным потоком / Э. И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 221–225.
- 12 **Sayyad, A. S.** Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature / A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal // Composite Structures. – 2017. – Vol. 171. – P. 486–504.
- 13 **Kreja, I.** A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels / I. Kreja // Central European Journal of Engineering. – 2011. – Vol. 1, is. 1. – P. 59–80.

14 **Осадчий, Н. В.** Модель деформации пятислойной панели с жестким заполнителем / Н. В. Осадчий, В. А. Мальшев, В. Т. Шепель // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 154–162.

15 **Морозов, Н. Ф.** Континуальная модель изгиба и колебаний многослойной нанопластины / Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 6. – С. 27–33.

16 **Савенкова, М. И.** Применение метода осреднения к материалам с физически нелинейными свойствами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / М. И. Савенкова. – М. : Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2013. – 26 с.

17 Non-polynomial framework for bending responses of the multi-scale hybrid laminated nanocomposite reinforced circular/annular plate / X. He [et al.] // Thin-Walled Structures. – 2021. – Vol. 166. – Article 108019. – 20 p.

18 **Khatua, T. P.** Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates / T. P. Khatua, Y. K. Cheung // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – Vol. 6, is. 1. – P. 11–24.

19 **Shishehsaz, M.** Stress distribution in a five-layer circular sandwich composite plate based on the third and hyperbolic shear deformation theories / M. Shishehsaz, H. Raissi, S. Moradi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2020. – Vol. 27, is. 11. – P. 927–940.

20 **Raissi, H.** Stress analysis of the five layer circular sandwich plate subjected to uniform distributed load by layerwise theory along with second order shear deformation theory / H. Raissi, M. Shishehsaz, S. Moradi // Australian Journal of Mechanical Engineering. – 2022. – Vol. 20, is. 3. – P. 625–636.

21 **Abdulhadi, F.** Symmetrical bending of multicore circular sandwich plates / F. Abdulhadi // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9, no. 11. – P. 2278–2280.

22 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 116–122.

23 **Салицкий, В. С.** Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 1. – М. : ООО «ТРП», 2021. – С. 199–201.

V. S. SALICKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

BENDING OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE CLAMPED ON THE CONTOUR

Deformation of a circular five-layer plate symmetrical in thickness under the action of a uniformly distributed load is considered. It is assumed that the kinematic hypotheses of Kirchhoff are fulfilled for the thin outer and inner carrier layers. A relatively thick core is deformed in accordance with the hypothesis of Timoshenko. At the equilibrium equations deriving by the variational Lagrange method, the work of tangential stresses in the filler is taken into account. The obtained analytical solution is numerically tested.

Keywords: five-layer circular plate, bending, analytical solution.

Получено 20.09.2022