

УДК 691-419:539.3

А. Г. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Приведена постановка краевой задачи об осесимметричном термосиловом изгибе упругой несимметричной по толщине трехслойной круговой пластины на двухпараметрическом основании Пастернака. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, для легкого несжимаемого по толщине заполнителя используется модель Тимошенко. Для описания зависимости модулей упругости несущих слоев от температуры используется формула, предложенная Дж. Ф. Беллом. На контуре предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Система линейных дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Получено общее аналитическое решение краевой задачи в функциях Бесселя. Проведен его численный анализ в зависимости от температуры при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины.

Ключевые слова: трёхслойная пластина, термоупругость, осесимметричный изгиб, основание Пастернака.

Введение. В последние годы в авиастроении, судостроении и строительстве получили распространение композиционные конструкции, имеющие слоистую структуру. Подобные конструкции, набранные из материалов с существенно отличающимися физико-механическими свойствами, обладают широким спектром достоинств: высокая несущая способность и изгибная жесткость, стойкость к тепловым и радиационным воздействиям, сравнительно малый удельный вес по сравнению с традиционными однослойными материалами.

Основы расчета механики слоистых балок, пластин и оболочек при термосиловых нагружениях изложены в монографии [1]. Влияние температурного поля на деформирование трехслойных стержней исследовано в работах [2, 3], оболочек – в статье [4]. Термоупругий изгиб трехслойных пластин, не связанных с упругими основаниями, рассмотрен в статьях [5–7]. В монографии [8] решен ряд задач статики и динамики трехслойных стержней и пластин, связанных с однопараметрическим основанием Винклера, в том числе с учетом температуры. Термосиловое деформирование прямоугольных слоистых пластин на двухпараметрическом основании Пастернака рассмотрено в работах [9–10]. Изгиб физически линейных и нелинейных круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, без учета температуры исследован в статьях [11–14]. В данной работе приведена постановка краевой задачи об термоупругом изгибе круговой пластины, получено аналитическое решение, проведен численный анализ перемещений.

Постановка краевой задачи в усилиях. Рассматривается изгиб круговой трехслойной пластины на основании Пастернака в температурном поле. Для несимметричной по толщине трехслойной пластины (рисунок 1) принята гипотеза ломаной линии: для внешних изотропных слоев с толщинами $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, в легком достаточно толстом несжимаемом заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Работа напряжений сдвига в заполнителе не учитывается. Внешняя поперечная нагрузка, действующая на верхний слой пластины, осесимметрична, т. е. не зависит от координаты φ : $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R , действующей на нижний слой пластины, и прогиба принимаются согласно модели Пастернака [15]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия основания, формально совпадающий с коэффициентом постели Винклера, Па/м; t_f – коэффициент сдвига основания, Па·м; $w(r)$ – осадка (прогиб) поверхности основания, м; Δ – оператор Лапласа

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Реакция основания направлена в сторону, противоположную прогибу.

Цилиндрическая система координат r, φ, z связана со срединной плоскостью заполнителя. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi(r) = 0$ при $r = R$, R – радиус пластины, м).

В соответствии с нагрузкой прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение $u(r)$ координатной плоскости не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Физические уравнения связи напряжений и деформаций принимаются в виде ($\alpha = r, \varphi, k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}; \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3) \varepsilon_{rz}^{(3)}; \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений k -го слоя, Па; $\varepsilon_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материала k -го слоя, Па; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения

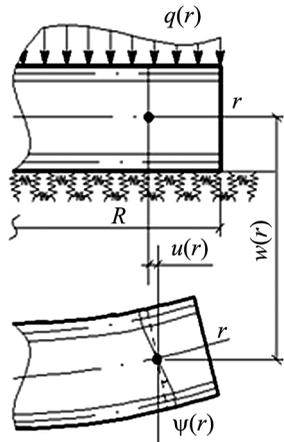


Рисунок 1 – Схема деформирования пластины

ния; ΔT_k – приращение температуры в k -м слое, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 , К.

Используя (2), представим компоненты тензора напряжений в слоях как разницу силовой (индекс « e ») и температурной (индекс « t ») частей:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_t^{(k)}; \quad \sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{\alpha}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)}; \\ \sigma_t^{(k)} &= 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k.\end{aligned}\quad (3)$$

Используя выражения (3), выделим во внутренних усилиях и моментах в слоях пластины силовую и температурную составляющие:

$$\begin{aligned}T_{\alpha}^{(k)} &= T_{\alpha e}^{(k)} - T_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{\alpha e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int \sigma_t^{(k)} dz; \\ M_{\alpha}^{(k)} &= M_{\alpha e}^{(k)} - M_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{\alpha e}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int \sigma_t^{(k)} z dz; \quad (4) \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_t = M_t^{(3)} + c(T_t^{(1)} - T_t^{(2)}).\end{aligned}$$

Считаем, что кроме поверхностной нагрузки $q(r)$, приложенной к наружной поверхности верхнего несущего слоя, на контуре пластины могут действовать внешние погонные силы T_r^0 , Q^0 и моменты H_r^0 , M_r^0 .

Используя вариационный принцип Лагранжа и выражения (1), (4), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающую равновесие рассматриваемой пластины на основании Пастернака (индекс « e » внизу опущен)

$$\begin{aligned}T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_{\varphi}) &= 0; \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_{\varphi}) = 0; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) + t_f \Delta w - \kappa_0 w &= -q.\end{aligned}\quad (5)$$

Задача замыкается присоединением граничных термосиловых условий на контуре пластины ($r = R$)

$$\begin{aligned}T_r &= T_r^0 + T_t; \quad H_r = H_r^0 + H_t; \\ M_r &= M_r^0 + M_t; \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_{\varphi}) = Q^0.\end{aligned}\quad (6)$$

Отметим, что температура $T(z, t)$ в явном виде входит только в силовые граничные условия (6). В уравнения (5) она не включена, так как производные от температурных слагаемых по радиальной координате равны нулю, а в разностных членах соответствующие добавки взаимно сокращаются.

Выразив внутренние усилия через перемещения и подставив их в (5), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для круговой трехслойной пластины в температурном поле:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0; \\
L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0; \\
L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) + t_f \Delta w - \kappa_0 w &= -q,
\end{aligned} \tag{7}$$

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

a_i – коэффициенты, учитывающие изменение модулей упругости материалов слоев по толщине в зависимости от температуры:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}; \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}); \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}; \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}); \\
a_5 &= K_{32} + c(K_{11} - K_{21}); \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2};
\end{aligned}$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad m = 0, 1, 2.$$

Краевая задача замыкается добавлением к (7) граничных условий. Например, в случае заделки контура пластины при $r = R$

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad w_{,r} = 0. \tag{8}$$

Общее решение краевой задачи. Рассмотрим процедуру решения системы уравнений (7). В силу ее линейности с помощью первого уравнения исключаем из второго и третьего уравнений функцию u . Затем, используя полученное второе уравнение, исключаем из первого и третьего функцию ψ . После двукратного интегрирования полученных первых двух уравнений и ряда преобразований третьего имеем:

$$\begin{aligned}
u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}; \\
w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) + \kappa_0 D w &= qD,
\end{aligned} \tag{9}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования; b_1, b_2, D – параметры, зависящие от температуры, которые выражаются через коэффициенты a_i :

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Для сплошных пластин в связи с ограниченностью искомого решения в начале координат необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Решение третьего уравнения системы (9) получим по методике, используемой в [14], в виде

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p(r), \tag{10}$$

где $J_0(\sqrt{a}kr)$, $J_0(\sqrt{a}kr)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка; a , \bar{a} и κ – коэффициенты, зависящие от характеристик упругого основания [14]; $w_p(r)$ – частное решение третьего уравнения (9).

Исходя из условия ограниченности решения в начале координат, в решении (9) для сплошных пластин необходимо положить $C_6 = C_8 = 0$, т. к. функции $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr)$ неограничены при $r = 0$. В результате решение задачи об изгибе круговой упругой трехслойной пластины на основании Пастернака в температурном поле принимает вид

$$u = b_1 w_r + C_1 r; \quad \psi = b_2 w_r + C_3 r; \quad w = C_5 J_0(\sqrt{a}kr) + C_7 J_0(\sqrt{a}kr) + w_p(r). \quad (11)$$

Константы интегрирования C_1 , C_3 , C_5 , C_7 следуют из условий закрепления контура пластины. При заделке контура пластины имеем следующие константы интегрирования, определяемые из (8):

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_5 = \frac{w_{p,r}(R)J_0(\sqrt{a}kR) + \kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)w_p(R)}{\kappa[\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR) - \sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR)]};$$

$$C_7 = \frac{w_{p,r}(R)J_0(\sqrt{a}kR) + \kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)w_p(R)}{\kappa[\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR) - \sqrt{a}J_0(\sqrt{a}kR)J_1(\sqrt{a}kR)]}. \quad (12)$$

Решение (11) с константами интегрирования (12) описывает термосиловые перемещения в упругой круговой трехслойной пластине, связанной с основанием Пастернака, при жесткой заделке ее контура.

Численный параметрический анализ. Численные результаты получены для защемленной по контуру пластины единичного радиуса $R = 1$ м, слой которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–4–Д16Т. Принимались: величина интенсивности равномерно распределенной поверхностной нагрузки $q_0 = 3$ МПа; толщины слоев $h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,06$ м, $h_3 = 0,4$ м. Для основания приняты следующие параметры: $\kappa_0 = 10$ МПа/м, $t_f = 0,1$ МПа·м. Термомеханические характеристики материалов слоев заимствованы из [8].

Для описания зависимости модулей упругости несущих слоев от температуры используется формула, предложенная Дж. Ф. Беллом [16]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\}\varphi(T),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/(2T_m)) & \text{при } 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала, К; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей упругости при нулевой температуре, Па (например, имея значение G_0 модуля сдвига при температуре T_0 , получаем $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$).

Зависимость параметров упругости полимерного материала (заполнителя) от температуры принимается в виде [8]

$$\{G(T), K(T)\} = \{G_0, K_0\} / \varphi_1(T); \quad \varphi_1(T) = 1 + B(\Delta T / T_m)^y \operatorname{sgn} \Delta T,$$

где $\Delta T = T - T_0$, T_0 – начальная температура, К; G_0, K_0 – значения параметров при температуре T_0 , Па.

На рисунке 2 показано изменение прогиба $w(r)$ и сдвига в заполнителе $\psi(r)$ вдоль радиуса трехслойной пластины на упругом основании при разных температурах слоев. Температурное воздействие на пластину приводит к увеличению перемещений. При повышении температуры на 70 К перемещения возрастают на 5,9%, при увеличении на 140 К – 10,4%.

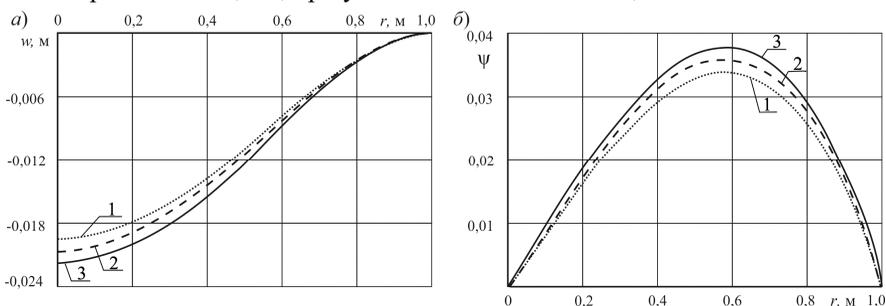


Рисунок 2 – Прогиб w (а) и сдвиг ψ (б) в заполнителе при температурах:
1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 363$ К, 3 – $T = 433$ К

Заключение. Полученное в работе общее решение может использоваться для исследования любого случая изгиба осесимметричной термосиловой нагрузкой трёхслойной круговой пластины с легким заполнителем, связанной с упругим основанием Пастернака.

Работа выполнена в рамках задания 1.08 ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Academic Press. – 2016. – 410 p.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (6). – С. 31–35.

3 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

4 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

5 **Зеленая, А. С.** Термоупругий изгиб трехслойной прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 45–49.

6 Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load / E. I. Starovoitov [et al.] // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol. 27, no. 2. – P. 175–188.

7 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трёхслойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

8 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.

9 **Bouderba, B.** Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler – Pasternak elastic foundations / B. Bouderba, M. S. A. Houari, A. Tounsi // Steel and Composite Structures. – 2013. – Vol. 14 (1). – P. 85–104.

10 **Zenkour, A. M.** Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler – Pasternak elastic substrate medium / A. M. Zenkour, M. Sobhy // Physica E : Low-dimensional Systems and Nanostructures. – 2013. – Vol. 53. – P. 251–259.

11 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трёхслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.

12 **Старовойтов, Э. И.** Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – № 2. – С. 107–114.

13 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трёхслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

14 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 392–406.

15 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели // П. Л. Пастернак. – М. : Госстройиздат. – 1954. – 56 с.

16 **Белл, Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых тел. В 2 ч. / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 600 с.

A. G. KOZEL

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THERMAL-FORCE BENDING OF AN ELASTIC THREE-LAYERED PLATE ON THE PASTERNAK FOUNDATION

The boundary value problem formulation for the axisymmetric thermal-force bending of an elastic three-layer circular plate, asymmetric in thickness, on the two-parameter Pasternak foundation is presented. In thin bearing layers, Kirchhoff's hypotheses are accepted; for a lightweight, incompressible in thickness aggregate, the Timoshenko model is used. To describe the dependence of the elastic moduli of the bearing layers on temperature, the formula proposed by J. F. Bell is used. At the contour it is assumed the presence of a rigid diaphragm, which prevents the relative shift of the layers. The system of equilibrium linear differential equations is obtained by the variational method. A general analytical solution of the boundary value problem in Bessel functions is obtained. Its numerical analysis is carried out as a function of temperature for a uniformly distributed load and rigid sealing of the plate contour.

Keywords: three-layered plate, thermoelasticity, axisymmetric bending, Pasternak foundation.

Получено 15.10.2021